# Exemples d'application de quelques méthodes mathématiques à l'étude synthétique des mouvements migratoires internes définitifs en Belgique

par I. NADASDI et S. PRUS-YARNUTOWSKI

## INTRODUCTION

L'évolution des sciences humaines s'accompagne, ces derniers temps, d'une amélioration constante des méthodes de recherche. La géographie économique n'a pas échappé non plus à cette évolution. En géographie économique, tout comme dans les autres sciences humaines, cette évolution va de pair avec la tentative d'utilisation du formalisme mathématique tant du côté de l'analyse que du côté de la synthèse.

Le but du présent travail est double. D'abord, il essaie de prouver que certaines méthodes couramment utilisées en d'autres domaines peuvent être adaptées à l'étude géographique des phénomènes spatiaux. Si certaines de ces méthodes ont déjà été employées par les géographes, les autres l'ont été beaucoup moins. Le deuxième but de notre travail est de contribuer à la connaissance des phénomènes migratoires internes en les éclairant sous un nouveau jour (1).

Il nous semble cependant que notre second but n'a pas été intégralement atteint parce que nous ne disposions pas de séries statistiques suffisamment représentatives. En effet, nous n'avons étudié les mouvements migratoires internes définitifs que durant les années 1964 et 1965 (2).

Une série plus longue, de 5 à 7 ans, aurait certainement été plus significative. Certes, l'Institut National de Statistique (I.N.S.) publie régulièrement les statistiques des migrations intérieures. Cependant, les séries statistiques de migrations internes d'avant et d'après 1963 n'ont pas la même base territoriale (3). C'est ce qui nous a empêchés de remonter au-delà de 1964 dans notre étude.

---

(1) En effet, les études traitant du même sujet sont nombreuses. Citons à titre d'exemple, les excellentes études de H. DAMAS, *Population de la Belgique. Les migrations intérieures*, dans *Population et famille*, cahier n° 4, Bruxelles, 1964 et de J. A. SPORCK, *Un facteur important de l'évolution démographique. Les migrations définitives*, dans *Cahiers de la Fondation Charles Plisnier*, Bruxelles, 1965, pp. 1-13.

(2) Les données que nous avons utilisées sur les migrations internes définitives en Belgique proviennent des *Annuaires statistiques de la Belgique*, t. 85, année 1964, pp. 48-49 et t. 86, année 1965, pp. 54-55.

(3) Cela résulte des modifications des limites des provinces et des arrondissements suivant la loi du 8 novembre 1961.

Celle-ci est purement quantitative. Nous ne nous soucions ni de la composition par âge et par sexe, ni de la structure professionnelle des migrants. Il est vrai que les statistiques de l'I.N.S. sont muettes à ce sujet. Enfin nous n'étudierons que les migrations internes et définitives.

Nous tenons à souligner que si le phénomène étudié est à priori démographique, l'analyse et la représentation qui en sont données — le lecteur peut s'en assurer — sont éminemment géographiques.

## I. — Centres de masses démographiques et axes de population en Belgique

Les besoins de notre travail nous obligèrent de chercher des indices synthétiques de la répartition de population. Pour ce faire, nous avons recouru à l'utilisation des centres de masses de la population.

Pour définir le centre démographique, il nous paraît utile de l'apparenter à la notion des centres de masses. On échappe ainsi à l'artifice qui attribue aux populations un poids-force, donc un sens vectoriel. Ce qui est le cas quand on use de l'analogie avec le centre de gravité.

Supposons une répartition plane de masses localisées $p_i$ (nombre d'habitants).

Soit un point quelconque $a$ dans ce plan.

Appelons les rayons vecteurs $\vec{r_i}$ les distances orientées entre le point $a$ et les points de localisation des masses.

On entend par centre de masses l'extrémité du vecteur $\vec{r_c}$ défini par l'équation suivante :

$$\vec{r_c} = \frac{\Sigma\, p_i\, \vec{r_i}}{\Sigma\, p_i}$$

Se référant à un système orthogonal d'axes, on obtiendra les coordonnées du centre de masses $x_c$, $y_c$, en projetant l'égalité vectorielle précédente sur ces axes. Les coordonnées des points de localisation des masses étant $x_i$, $y_i$, et celles du point quelconque a, $x_a$,$y_a$

$$(x_c - x_a) = \frac{\Sigma\, p_i\, x_i - x_a\, \Sigma\, p_i}{p_i}$$

$$x_c = \frac{\Sigma\, p_i\, x_i}{\Sigma\, p_i} \quad \text{et pareillement,}$$

$$y_c = \frac{\Sigma\, p_i\, y_i}{\Sigma\, p_i}$$

coordonnées du centre de masses (de populations) (4).

(4) Les définitions : centre de gravité de population, centre de masses, centre démographique, répondent au même formalisme analytique.

Dans le calcul pratique, nous avons utilisé la carte administrative de Belgique au 1 : 300.000 indiquant la situation au 31 décembre 1964 éditée par l'Institut géographique militaire (I.G.M.) ainsi que les chiffres de population des communes belges à la même date, publiés dans l'annexe du Moniteur belge du 23 juin 1965.

Après avoir mesuré sur la carte administrative, avec l'exactitude que permet l'échelle, les coordonnées d'un seul point dans chaque commune (5) du pays, nous avons calculé par les formules indiquées ci-dessus les coordonnées des centres de gravité au niveau des divers échelons administratifs, ainsi qu'au niveau des deux grandes régions linguistiques. L'essentiel des résultats de ce calcul a été représenté dans le cartogramme de la figure 1.

Cette carte doit être analysée avec prudence (voir ci-après pp. 63, note 14, et 67) (6). Toutefois, les comparaisons des déplacements des centres de masses entre deux dates donnent un indice intéressant sur les variations de la répartition spatiale de la population. La situation des centres de masses de population au sein de leurs régions respectives fournit une indication utile sur la valeur de la localisation des centres administratifs et des équipements communautaires.

Nous n'allons pas entrer dans un commentaire détaillé de cette carte mais nous tenons cependant à souligner quelques traits qui nous paraissent significatifs.

D'après les calculs de l'I.N.S., le centre de gravité de la population du Royaume en 1961 se trouvait à Etterbeek dans le parc du Collège Saint-Michel (7). Selon nos calculs, le centre de masses tombe en 1964 à 250-300 mètres plus au nord-est, à proximité du square Léopold II à Woluwé-Saint-Pierre. Le fait que notre calcul fut effectué sur les données d'un recensement d'un état administratif ultérieur de trois ans et que le centre de gravité s'est encore déplacé vers le nord-est apporte, croyons-nous, la preuve que nos résultats jouissent d'une bonne précision pratique. Ce déplacement vers le nord-est est dû au plus grand accroissement naturel de la population enregistré en Campine, mais aussi (voir ci-après) aux mouvements migratoires internes définitifs.

---

(5) Au préalable, nous avons supposé que toute la population de chaque commune est localisée en ce point, choisi généralement vers le centre habité de la commune.

(6) L'espace géographique réel n'est pas un espace isotrope.

(7) *Recensement de la population*, 1961. Tome 1. *Chiffres de la population*. I.N.S., 1963, p. 52.

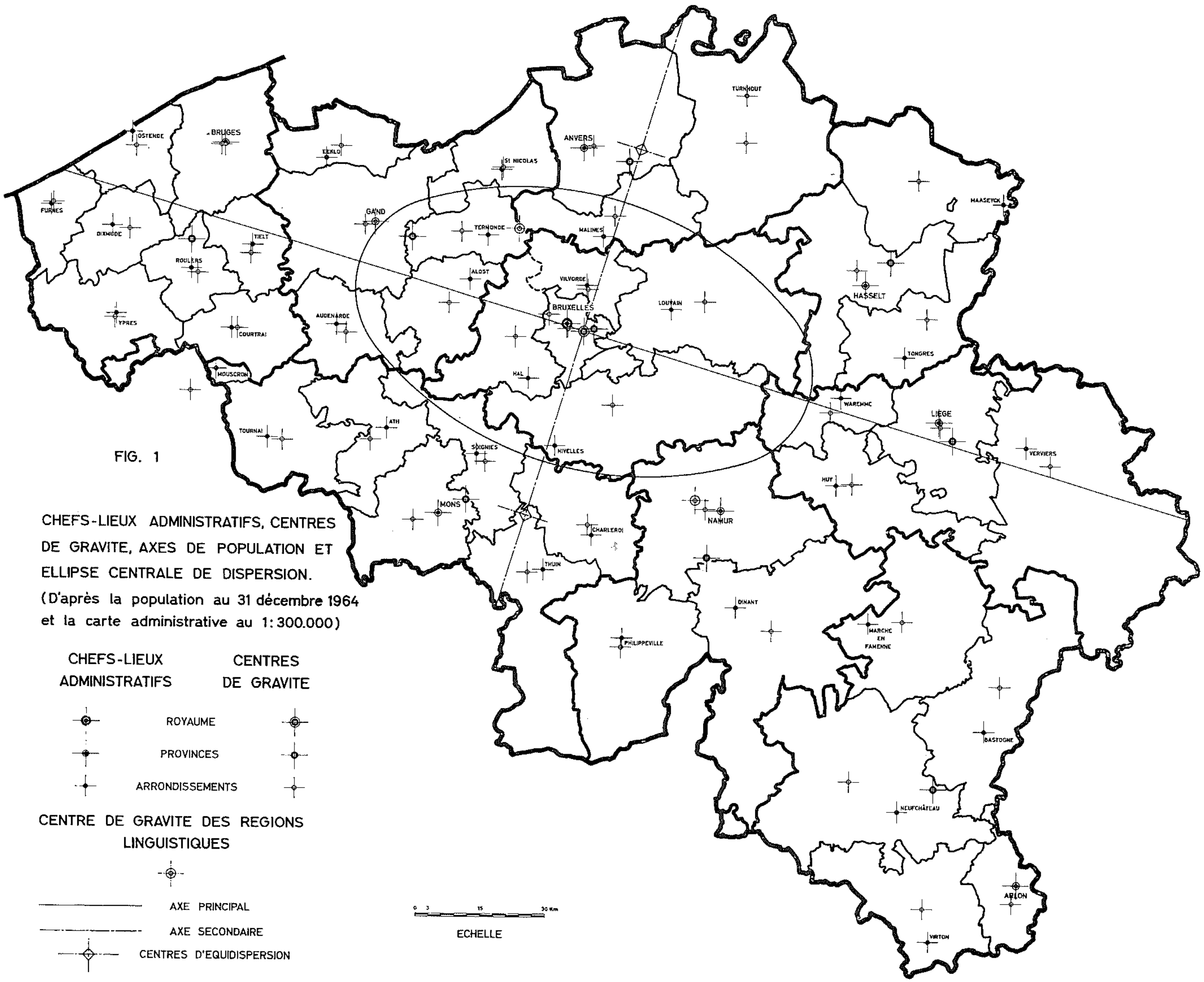



FIG. 1

CHEFS-LIEUX ADMINISTRATIFS, CENTRES DE GRAVITE, AXES DE POPULATION ET ELLIPSE CENTRALE DE DISPERSION.
(D'après la population au 31 décembre 1964 et la carte administrative au 1: 300.000)

Si le centre de gravité démographique du Royaume se situe bien à l'intérieur de l'agglomération bruxelloise, sur le plan des régions linguistiques par contre, on enregistre une plus grande excentricité par rapport aux métropoles, en particulier pour la Wallonie (8) dont le centre de gravité tombe dans la proximité de Namur. Ceci déforce évidemment la position de Liège comme éventuelle capitale administrative de la « Wallonie ». Rappelons que les centres de gravité des deux régions linguistiques et celui du Royaume se trouvent sur une même droite, mais le centre de gravité de la Flandre se trouve sensiblement plus près du centre du Royaume.

Sur le plan provincial, on observe une assez bonne répartition des centres de gravité démographiques à l'exception des provinces du Luxembourg et de Flandre Occidentale. Le centre de masse de celle-ci se trouve au nord de Roulers, sa position étant déterminée par le bicéphalisme accusé de cette province, caractérisé par la zone de Bruges-Ostende dans le nord et par l'agglomération courtraisienne dans le sud. Dans la province de Luxembourg, Arlon est beaucoup trop excentrique par rapport au centre de masses de la province (9).

La situation des centres de gravité au niveau des arrondissements accuse une homogénéité acceptable. Souvent les centres de gravité des arrondissements se trouvent dans le voisinage de leurs chefs-lieux respectifs. C'est surtout le cas pour la Flandre Occidentale. Soulignons cependant que dans le cas de divergences importantes, la localisation de certains chefs-lieux d'arrondissements, tels que Maaseik et Nivelles, pourrait être mise en cause. Il est vrai qu'il s'agit de régions qui sont à la recherche de leur équilibre dans le réseau urbain (10).

Notons que les centres de gravité des arrondissements de Hal-Vilvorde et de Mouscron tombent hors des limites de leurs arrondissements. Ceci est la conséquence de la forme et de la discontinuité de leur territoire.

La figure 1 montre encore les axes de population et l'ellipse de dispersion de la population en Belgique (pour la signification de ces

(8) Pour des raisons pratiques, nous avons inclus la région de langue allemande dans la Wallonie.

(9) Le choix d'Arlon en tant que chef-lieu du Luxembourg belge fut d'ailleurs un acte politique au détriment de Neufchâteau qui a une situation géographique meilleure par rapport à la province. En 1839, on a tenu à manifester la « présence belge » à proximité du Grand-Duché de Luxembourg auquel la Belgique ne voulait pas renoncer.

(10) Voir à ce sujet le rapport de J. A. Sporck en collaboration avec I. Nadasdi, C. M. Piavaux et J. Denblyden, *Hiérarchie des villes et leur structuration en réseau*. Ministère des Travaux Publics C.N.A.T., Liège, 1966, pp. 34 et suiv.

éléments, voir la quatrième partie de l'étude). Les axes de population correspondent *grosso modo* aux axes Anvers - Bruxelles - Charleroi d'une part et d'Ostende - Bruxelles - Liège d'autre part. Notons que, dans les descriptions géographiques de la Belgique, on retrouve déjà depuis longtemps la référence à ces axes qui sont mis ici en évidence par des recherches quantitatives.

Enfin, nous avons dessiné sur la carte les centres d'équidispersion. Les centres d'équidispersion sont des centres par rapport auxquels l'ellipse de dispersion se réduit au cercle. Il ne peut en exister que deux situés sur l'axe secondaire. Ils peuvent être considérés comme des points particuliers de l'espace étudié.

## II. — Analyse vectorielle des émigrations internes en Belgique

L'utilisation des éléments de l'algèbre vectorielle à l'étude des flux migratoires est connue des démographes (11). La méthode est cependant très géographique car la grandeur et la direction des résultantes des mouvements migratoires sont déterminées par la situation et l'attraction relatives des pôles pris en considération.

Nous avons effectué le calcul au niveau des provinces et des arrondissements. Hélas, par suite de la longueur des calculs, nous avons dû nous limiter à l'étude des émigrations internes. L'étude des immigrations internes ainsi que des soldes migratoires internes aurait dû donner des renseignements complémentaires.

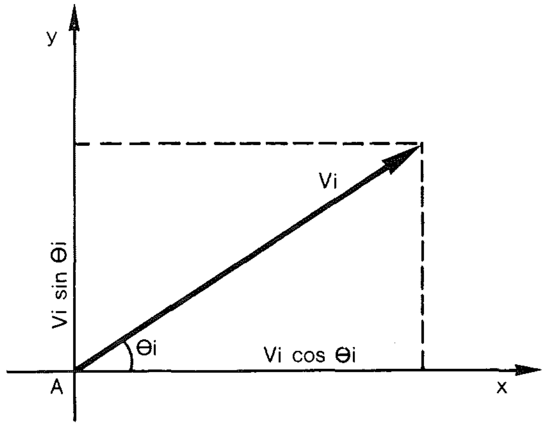
Dans la pratique, nous avons procédé de la manière suivante : nous avons fait abstraction des migrations extérieures du Royaume et des migrations intérieures au sein de l'unité administrative du niveau choisi.

Les centres de gravité calculés constituent les points d'appui des vecteurs, le sens du vecteur étant déterminé par le centre de gravité de l'arrondissement de destination et la grandeur du vecteur étant proportionnelle au nombre d'émigrants (voir les flèches en traits fins sur la figure 2). L'addition de ces vecteurs donne la résultante indiquée par les flèches épaisses sur la figure.

L'addition des vecteurs peut se faire par voie de construction graphique, comme nous l'avons indiqué par les flèches en traits discontinus pour la province de Brabant. Dans la pratique, surtout si les vecteurs sont nombreux, il est utile de procéder analytiquement.

(11) Voir notamment *Bevezetés a demogràfiàba* (« Introduction à la démographie »). *Közgazdasàgi és Jogi Kiadò*, Budapest, 1964, p. 173.

On procède de la manière suivante : on fait passer un système d'axe orthogonal par les centres de gravité (A). Sur les axes, on projette les vecteurs $v_i$, $v_j$, $v_k$ ... $v_n$.




Les coordonnées $x = \sum_1^i v_i \cos\theta_i$ et $y = \sum_1^i v_i \sin\theta_i$ déterminent, par rapport à l'origine du système de coordonnées (A) la grandeur et la direction des résultantes.

Sur la figure 2, nous avons indiqué les résultantes représentées en grandeur et direction. La figure montre clairement qu'en Belgique, par suite de la situation centrale, les mouvements sont centripètes et pointent vers le centre de gravité du Royaume, ce qui lui confère une grande stabilité. De ce fait, le centre de gravité du Royaume ne se déplace que très légèrement par suite des migrations internes.

Les directions des résultantes démontrent d'ailleurs que, toutes autres choses étant égales, les mouvements migratoires sont plus importants entre les centres d'une même région linguistique, car en analysant les directions des résultantes, on découvre que celles-ci sont déviées, par rapport au centre de gravité du Royaume, vers leurs centres de gravité linguistiques respectifs.

Ce phénomène est plus particulièrement observable pour la Flandre. En ce qui concerne la Wallonie, les déviations des résultantes des provinces de Namur et de Luxembourg indiquent que Liège reçoit un contingent d'immigrants considérable en provenance du Luxembourg et que Namur envoie beaucoup d'émigrants vers le Hainaut.

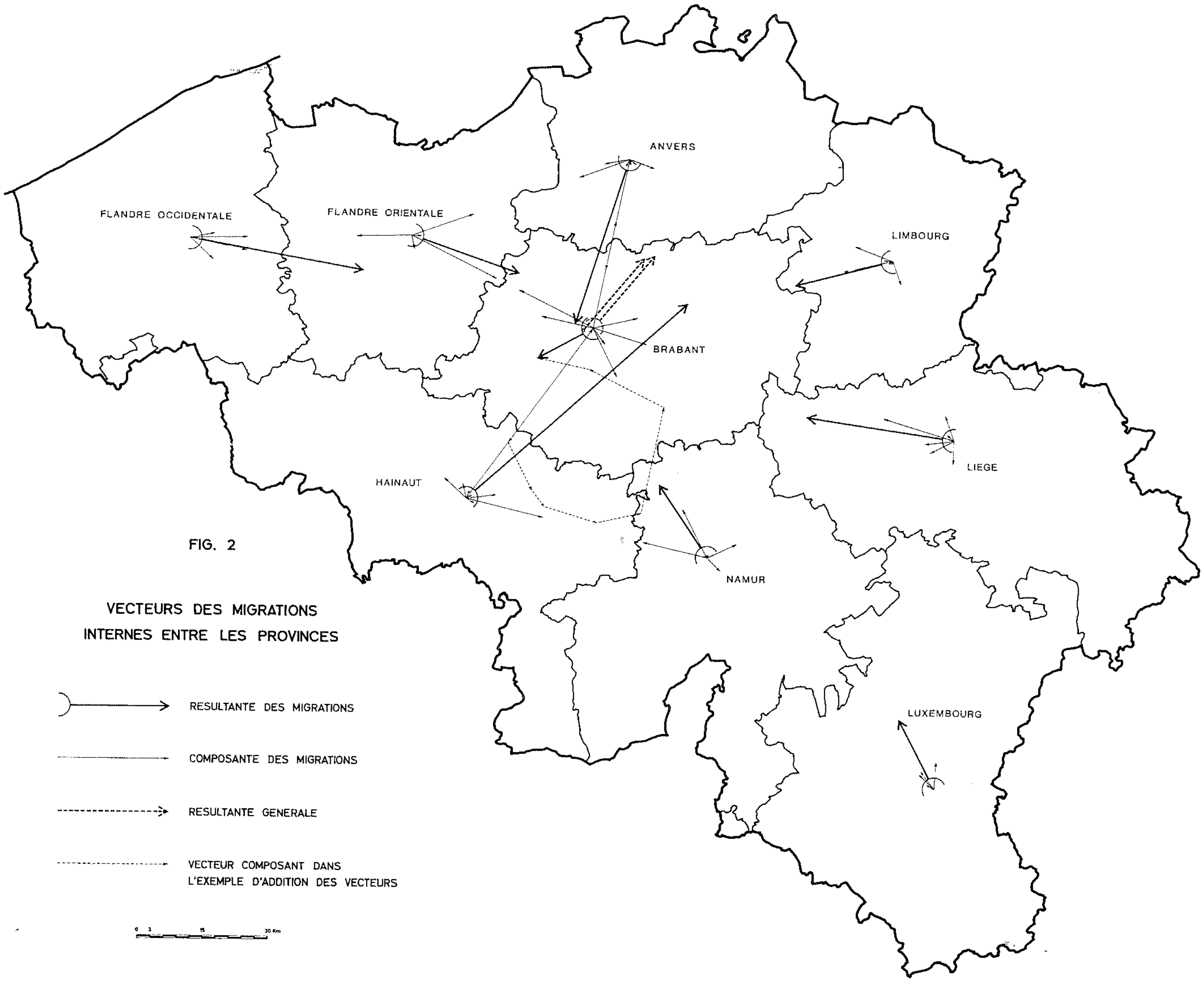



FIG. 2

VECTEURS DES MIGRATIONS
INTERNES ENTRE LES PROVINCES

Enfin, la résultante générale (somme géométrique des résultantes émigratoires des provinces) indiquée en traits épais discontinus et transmise au centre de gravité du Royaume peut donner sous certaines réserves une idée sur le sens de déplacement du centre de gravité du Royaume dû aux mouvements migratoires (12). Il faut naturellement se garder d'attribuer une valeur de distance de déplacement à la longueur de la flèche épaisse discontinue.

Si l'on descend au niveau inférieur, celui des arrondissements, on peut obtenir un véritable champ de force migratoire (fig. 3). Les principes de confection de ce cartogramme sont les mêmes que ceux que nous venons d'analyser. Cependant, pour des raisons cartographiques, nous devions renoncer à représenter la grandeur des résultantes par la longueur des flèches. Sur ce cartogramme, ce sont les superficies des flèches qui représentent la grandeur des résultantes. Les flèches sont de longueur égale. Les superficies des cercles situés sur les centres de gravité des arrondissements sont proportionnelles au nombre des émigrants. Il faut bien voir qu'il n'y a pas de relation directe entre la grandeur des résultantes et le nombre des émigrants.

La carte indique toujours la prédominance des mouvements centripètes déjà décrits. Cependant, on ne tarde pas à découvrir certaines tendances centrifuges, ne fût-ce que de valeur régionale. C'est notamment le cas des résultantes des arrondissements de Waremme et de Huy qui subissent l'attraction dominante de la région liégeoise. Il en va de même pour l'arrondissement de Malines qui semble s'intégrer davantage dans l'orbite de la Métropole anversoise que dans celui de la capitale.

Il est intéressant d'observer que les résultantes hennuyères, namuroises et luxembourgeoises forment un véritable faisceau pointant sur l'agglomération bruxelloise, à l'exception cependant des arrondissements d'Ath, de Soignies et de Namur dont la situation, intercalée entre la capitale d'une part et les autres arrondissements wallons d'autre part, confère à leurs résultantes des directions fortement déviées par rapport aux sens centripètes.

La déviation importante de la résultante de l'arrondissement de Virton vers le centre de gravité de l'arrondissement d'Arlon indique que le nombre d'immigrants d'Arlon en provenance de l'arrondissement de Virton est élevé. La faiblesse de la résultante de l'arrondissement de Neufchâteau est due au fait que les émigrations allant vers le nord-ouest sont approximativement contrebalancées par les émigrations allant vers

(12) Voir p. 64 et en annexe le calcul exact de ce déplacement.

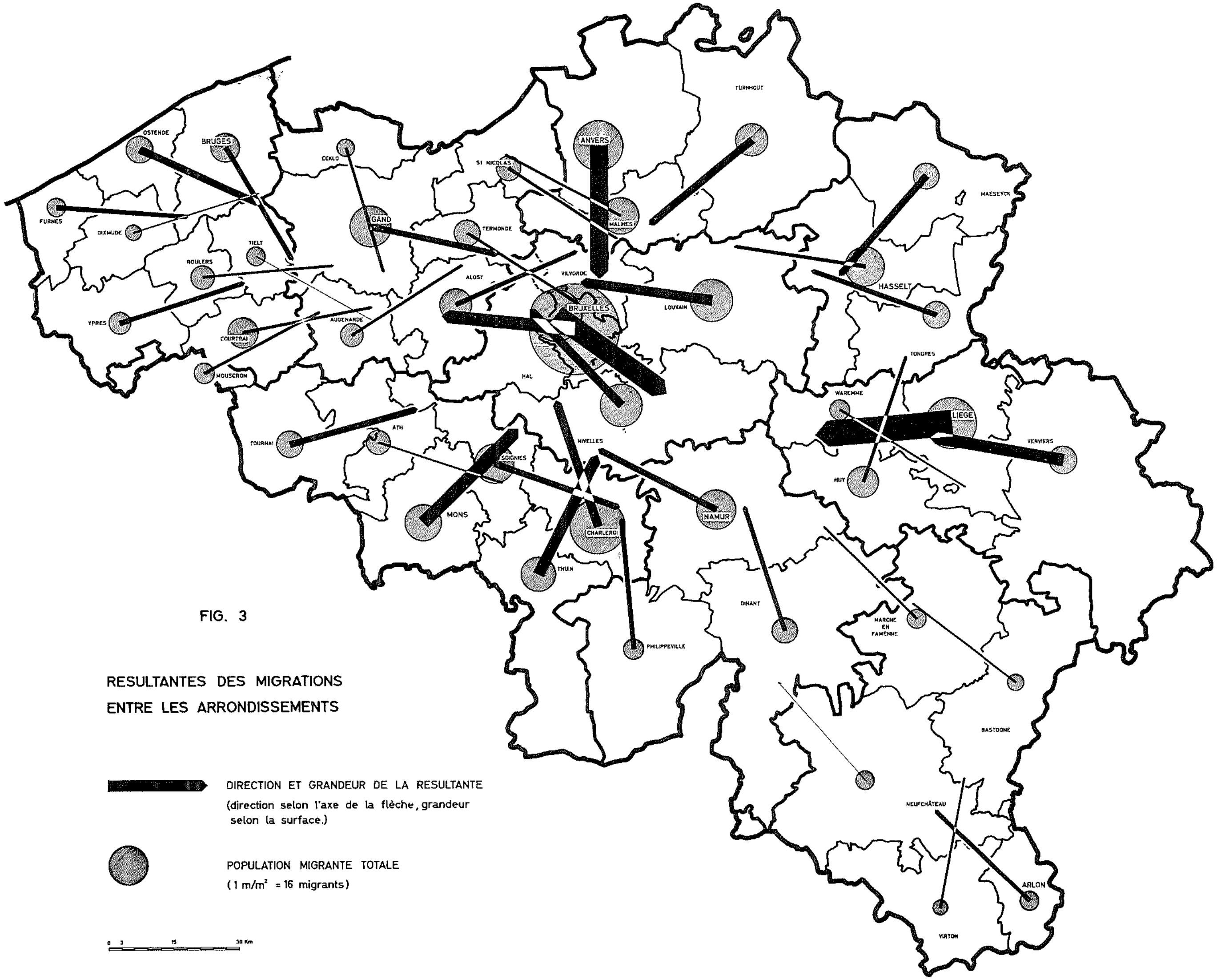



FIG. 3

RESULTANTES DES MIGRATIONS ENTRE LES ARRONDISSEMENTS

N.B. - La valeur de 1 mm² = 16 migrants se réfère au document de base établi au 1:300.000.

le sud-est. C'est le même phénomène que l'on observe pour l'arrondissement de Tielt.

La limite linguistique joue un rôle considérable à ce niveau également. Il y a peu de migrants définitifs qui traversent la frontière linguistique, sauf dans la région bruxelloise évidemment. Il y a cependant une exception et c'est l'arrondissement de Mouscron dont les relations migratoires avec l'arrondissement de Courtrai continuent à être dominantes. A l'autre bout de la frontière linguistique, l'on découvre non sans un certain étonnement que l'arrondissement de Tongres est désormais nettement sous l'influence, sur le plan migratoire, de l'arrondissement de Hasselt, même si certaines communes de l'extrême sud de l'arrondissement de Tongres continuent à envoyer la majorité de leurs migrants vers l'agglomération liégeoise.

Notons enfin que l'analyse d'un niveau inférieur à celui des arrondissements, par exemple à celui des cantons, pourrait donner des résultats plus significatifs, un champ de force migratoire plus circonstancié où l'on découvrirait certainement des foyers locaux d'immigration.

## III. — Seconde variante de l'analyse des mouvements migratoires internes

Analysant les mouvements de migrations internes, la méthode précédente tenait compte de la direction de ces mouvements et des nombres de migrants. Il peut être utile parfois de décrire le phénomène migratoire en considérant à côté des éléments cités le facteur des distances.

La définition du centre de masses telle que citée précédemment (§ I) se réfère à une équation vectorielle où entrent à la fois et les nombres de population et les rayons vecteurs, donc les facteurs des distances et des directions.

L'adaptation du concept général de centre de masses au problème particulier de migrations se prête à la description de ces mouvements tenant compte des facteurs énumérés.

Afin de mettre en évidence le mouvement migratoire, on admettra comme hypothèse de travail que :

a) le nombre total de population est stable ;
b) les mouvements de la population à l'intérieur de chaque portion de territoire prise en considération (par exemple : province) n'affectent pas la position du centre démographique de cette province ;

c) de même les migrations vers l'extérieur et vers l'intérieur de la province, quoique pouvant changer sa population en nombre, conservent néanmoins l'emplacement du centre démographique (ceci est admissible vu que l'ensemble migrant n'affecte que peu la densité initiale).

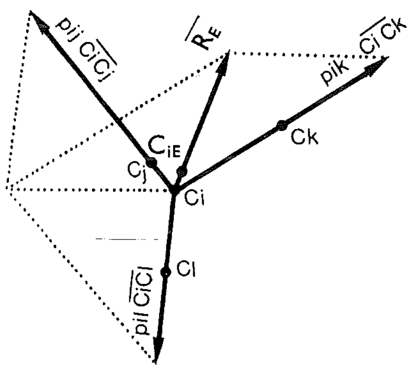
Afin de visualiser les forces migratoires qui s'exercent sur la population de la province i du fait des provinces environantes j ; k ; l ;..., on recourra au modèle suivant :

a) *Emigration :*

Appelons i ; j ; k ; ... les provinces dont les centres démographiques sont respectivement $C_i$ ; $C_j$ ; $C_k$ ; $C_l$ ; ...
Les populations émigrant de la province i vers les provinces j ; k ; l ; ... sont $p_{ij}$, $p_{ik}$, $p_{il}$, ...
Situons les émigrants au centre démographique des provinces de leurs destinations. Appliquons la définition de centre de masses, dans ce cas de centre de masses émigrantes $C_{iE}$ (en prenant comme point d'appui de rayons vecteurs centrifuges le centre $C_i$).
On obtient l'équation :

$$\overline{C_i C_{iE}} \times (p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + ...) = p_{ij}\,\overline{C_i C_j} + p_{ik}\,\overline{C_i C_k} + p_{il}\,\overline{C_i C_l}$$

La transcription graphique de cette équation est illustrée par le croquis ci-contre.




$$\overline{R_E} = \overline{C_i C_{iE}} \times \sum_j p_{ij}$$

$R_E$ étant dès lors un vecteur indice de forces exercées sur la population de la province i par les provinces j, k, l, ...
Si le $C_i$ et le $C_{iE}$ coïncident, $R_E$ est nul. On parlera dans ce cas de l'émigration équilibrée, c'est-à-dire sans influence sur la position initiale du centre démographique général (13).

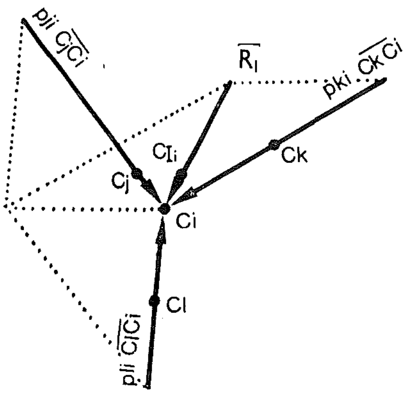
b) *Immigration :*

Gardons les notations pour les provinces et leurs centres démographiques. Les populations immigrant dans la province i des provinces j ; k ; l ; ... sont $p_{ji}$, $p_{ki}$, $p_{li}$, ...

Situons les immigrants au centre démographique des provinces de leurs origines. Appliquons la définition de centre de masses dans ce cas de centre de masses immigrantes $C_{Ii}$, en prenant comme point d'aboutissement des rayons vecteurs centripètes le centre $C_i$.
On obtient l'équation :

$$\overline{C_{Ii}\,C_i} \times (p_{ji} + p_{ki} + p_{li} + \ldots) = p_{ji}\,\overline{C_j\,C_i} + p_{ki}\,\overline{C_k\,C_i} + p_{li}\,\overline{C_l\,C_i}$$

La transcription graphique de cette équation est illustrée par le croquis ci-contre.




$$\overline{R_I} = \overline{C_{Ii}\,C_i} \times \sum_j p_{ji}$$

$R_I$ étant dès lors un vecteur indice de forces d'immigration exercées par la province i sur les populations des provinces j, k, l...
Si le $C_i$ et le $C_{Ii}$ coïncident, $R_I$ est nul. On parlera dans ce cas de l'immigration équilibrée, c'est-à-dire sans influence sur la position initiale du centre démographique général (13).

(Afin de rendre plus tangible la description des mouvements migratoires présentée ci-dessus, on peut recourir à un modèle analogique ressortissant à la mécanique. Imaginons fixés aux points $C_j$, $C_k$, $C_l$, ..., les ressorts dont les longueurs initiales sont négligeables et les modules d'élasticités respectivement égales aux nombres des populations émigrant vers ces points du point $C_i$ (ou immigrant de ces points vers $C_i$). Dans la version *émigration*, supposons que l'on tende les ressorts vers $C_i$ en confectionnant en ce point leur attache commune. La résultante de forces de traction de ces ressorts s'exerçant en $C_i$ est bien la résultante $R_E$. Libérons ensuite du point $C_i$ l'attache commune de ressorts ; elle occupera, à l'équilibre, le point $C_{iE}$. Dans la version *immigration*, supposons les ressorts tendus de façon à pouvoir former une attache commune de leurs extrémités. Laissons prendre à cette attache commune la position d'équilibre. L'attache dans cette position se trouvera bien au point $C_{Ii}$, et pour

(13) Voir plus loin à ce propos, pp. 62-64.

l'amener de ce point vers le point $C_i$ et l'y maintenir, il faut exercer une force égale à $R_I$).

Le modèle ainsi conçu ne préjuge en rien de la nature des forces d'attraction migratoire. Il se borne à préciser que les effets de ces forces diminuent avec la distance sur laquelle elles s'exercent. En d'autres mots, deux forces d'attraction d'égale importance F exercées par un centre et agissant sur deux endroits différents éloignés respectivement de a et b de ce centre auront pour effet d'attirer des nombres différents d'immigrants de ces endroits vers lui.

$$F_1 = a\ P_1 \qquad F_1 = F_2 \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a}$$
$$F_2 = b\ P_2 \qquad a\ P_1 = b\ P_2$$

Ces nombres sont donc inversément proportionnels à la distance qui sépare les migrants du pôle d'attraction. Il est évident que l'importance de la force d'attraction d'un centre résulte de la conjonction de l'attirance absolue due à ce centre et de l'attrait relatif ; la même cause peut être perçue différemment en des endroits différents, et ceci pour d'autres raisons que l'éloignement.

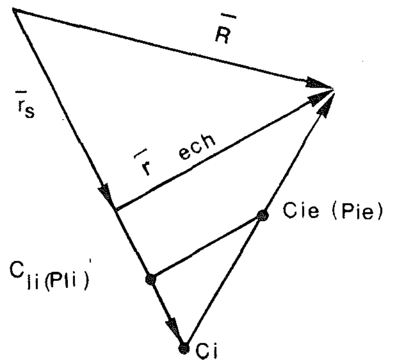
Le modèle élaboré prend en considération l'effet global de l'attraction exercée traitant les chiffres statistiques des migrations réparties d'après origine et destination ; il tient compte explicitement de l'éloignement.

La méthode proposée se résume au calcul des centres de masses des populations migrantes. Voulant caractériser la migration affectant une portion du territoire, par exemple la province dont on connaît le centre de gravité, on comptabilise le mouvement d'immigration vers cette province et d'émigration à partir d'elle durant l'espace de temps pris en considération. Dès lors, on calcule les centres de masses émigrantes, chaque masse étant située dans les centres de gravité de territoire de leurs destinations et, pareillement, les centres des masses immigrants situés aux centres de gravité de leurs territoires de provenance.

Ayant effectué ce calcul, nous sommes en possession des cinq éléments qui caractérisent les mouvements migratoires concernant la province, à savoir : centre démographique de la province, les deux centres de masses migrantes et l'importance respective de ces masses.

Le vecteur $\overline{C_{Ii}\,C_i}\,P_{Ii}$ (ou $P_{Ii} = \sum_j p_{ji}$) est un indice de la force globale exercée par la province i sur les masses immigrantes vers elle et dont l'effet — l'immigration — déplace la position initiale du centre démographique général. Pareillement le vecteur $\overline{C_i\,C_{iE}}\,P_{iE}$ (ou $P_{iE} = \sum_j p_{ij}$)

est un indice de la force globale s'exerçant sur la population de la province i du fait de provinces environnantes et dont l'effet est l'émigration vers ces provinces déplaçant la position initiale du centre démographique général.




Effectuant la sommation, on obtiendra la résultante $\bar{R}$ visualisant l'effet total de migration sur la position du centre démographique général.

Nous avons annoncé ci-dessus les cinq éléments caractérisant les mouvements migratoires concernant la province. Si la résultante $\bar{R}$ synthétise l'ensemble de ces traits sous une forme vectorielle, dans le cas où elle est nulle, il ne faut pas perdre de vue qu'il reste encore un élément scalaire pour caractériser ces mouvements, à savoir l'importance respective de masses d'émigration et d'immigration.

Pour préciser davantage cet effet total, nous scinderons la migration affectant la province en deux éléments. Le premier élément caractérisera l'échange de population entre la province et le restant du territoire, l'autre tiendra compte du solde migratoire, positif pour la province si $P_{iE} < P_{Ii}$, négatif dans le cas contraire. Ceci se comprend comme la décomposition du vecteur $\bar{R}$ en $\bar{r}$ éch., parallèle au vecteur $\overline{C_{Ii}\, C_{iE}}$ et de grandeurs $C_{Ii}\, C_{iE} \times P_{iE}$ (ou $P_{Ii}$) quand $P_{iE} < P_{Ii}$ (ou $P_{Ii} < P_{iE}$), et le vecteur $r_s$.

L'effet de l'échange de population caractérisé par le vecteur r éch. peut se traduire comme le changement de la répartition dans l'ensemble du territoire dont la conséquence globale se montre par le déplacement du centre démographique général et cela dans le sens du vecteur r éch., parallèlement à ce vecteur et de l'importance égale au rapport de ce vecteur à la masse totale de la population P (14).

De même, le vecteur $r_s$ caractérisant le solde migratoire de la province indique la force qui s'exerce sur cette province si le solde migratoire

(14) Il est bon de noter que le fait de coïncidence CIi et CiE ne doit pas nécessairement signifier que la répartition de la population dans l'ensemble est restée telle quelle si $P_{Ii} = P_{IE}$ ni que ce changement est nécessairement proportionnel à la répartition initiale si PIi $\rangle\ \langle$ PiE, hormis le cas simple de trois centres au plus extérieurs à la province.

est négatif ou la force exercée par la province si ce solde est positif. Le résultat se traduit respectivement par l'appauvrissement de la province en population compensé par un enrichissement du restant du territoire ou vice-versa. L'effet de cet appauvrissement (ou enrichissement) peut être compris comme un déplacement du centre démographique général dans le sens et parallèle au vecteur $r_s$ et de l'importance $\frac{r_S}{P}$

L'ensemble du territoire se caractérise à l'égard des migrations internes par son centre de gravité initial, par les deux centres généraux des masses migrantes et par l'importance de la masse ($\sum_i P_{iE} = E = \sum_i P_{Ii} = I$). L'effet de l'ensemble de migration peut se décrire comme un déplacement du centre démographique général parallèlement et dans le sens du vecteur $\overline{C_{IC}\,C_{EG}}$ et de grandeur $\frac{C_{IG}\,C_{EG} \times E}{P}$ (15)

Nous avons appliqué le modèle décrit ci-dessus pour l'étude concrète des mouvements migratoires en Belgique (1964 et 1965) (16). La représentation cartographique en est donnée dans la figure 4.

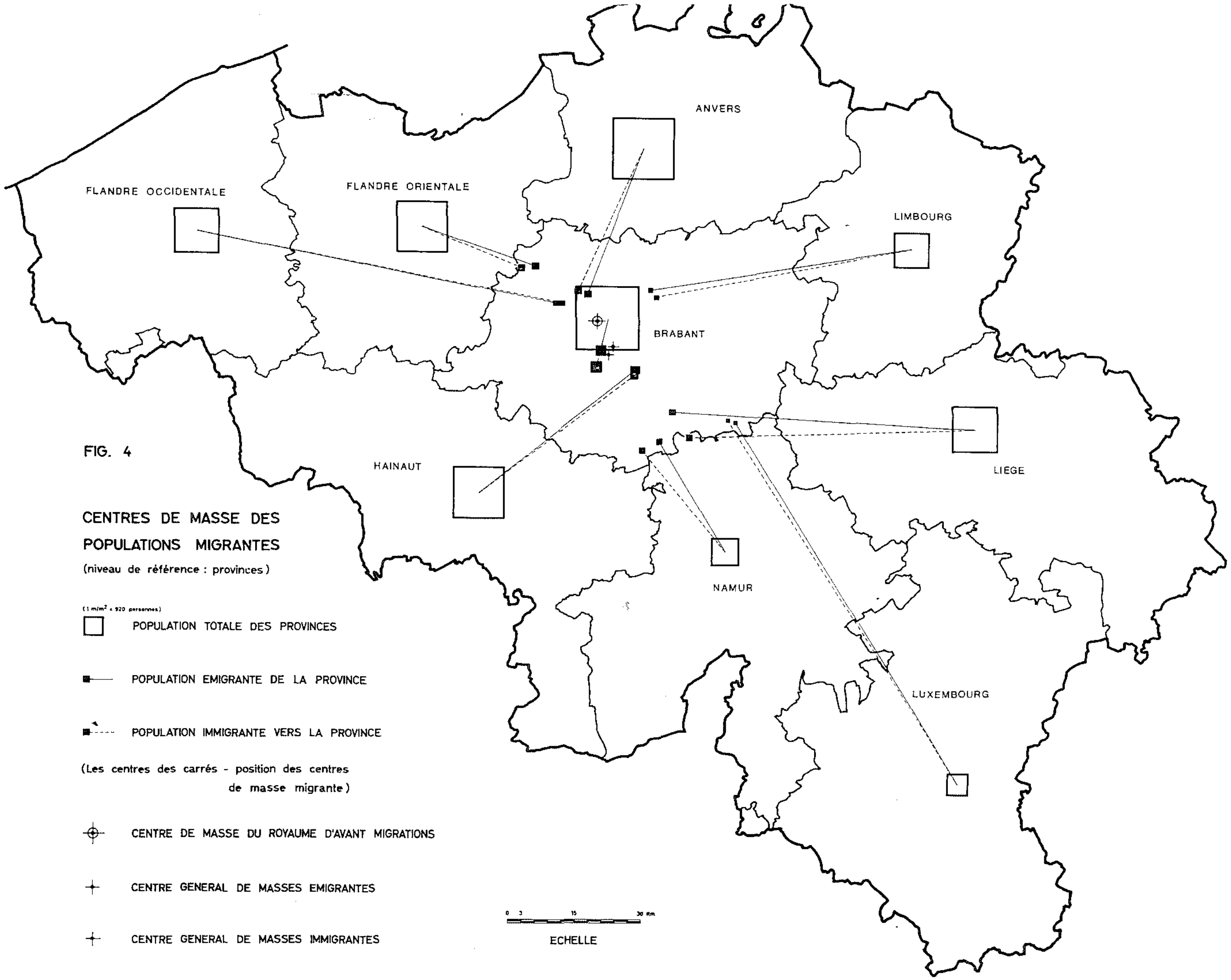
Les grands carrés, qui indiquent la population des provinces, sont centrés sur les centres de masses des provinces. Les petits carrés, noirs et hachurés, représentent respectivement les populations émigrantes et immigrantes centrées sur les centres des masses d'immigration et d'émigration des provinces. Ces centres sont reliés par des lignes à leurs provinces respectives indiquant « l'origine » ou la « destination » des migrants.

A remarquer que tous les carrés sont à la même échelle, ce qui facilite les comparaisons. Ainsi on peut se faire une idée immédiate de l'importance des mouvements migratoires par rapport à la population totale des provinces et ceci est encore plus intéressant pour l'importance et le signe du solde migratoire. Pour cela, il suffit de comparer les carrés qui représentent les populations émigrantes et immigrantes de la même province.

On observe que tous les centres régionaux de masses migratoires tombent à l'intérieur de la province de Brabant, ce qui démontre une fois de plus la prédominance de l'agglomération bruxelloise, qui, à vrai

(15) Voir en annexe 1, les calculs de déplacements du centre démographique.

(16) Rappelons que l'on continue à ignorer les migrations internes de l'unité administrative étudiée, ici la province.




N.B. - La valeur de 1 mm² = 920 personnes se réfère au document de base établi au 1:300.000.

dire, est-il besoin de le souligner, est due autant à sa situation géographique centrale qu'à ses fonctions.

Les distances et directions qui séparent les centres généraux de masses migrantes de la même province constituent un indice synthétique sur l'importance de la « distorsion » entre l'origine et la destination géographiques des migrants. Ces distorsions sont relativement faibles pour le niveau et la période étudiés. On observe cependant pour Liège par exemple que les lieux de destination des émigrants à partir de cette province se situent en moyenne plus vers le nord et vers l'ouest que les lieux d'origine des immigrants à destination de cette même province. Comment l'expliquer ? C'est que la Wallonie ne constitue pas une région d'émigration intéressante pour les Liégeois tandis que l'agglomération est encore un pôle attractif pour les luxembourgeois ainsi que pour certains namurois. De même, dans la province de Namur, on observe que les lieux de provenance des immigrants se situent plus au sud et à l'ouest que les lieux de destination d'émigrants davantage situés vers le nord et vers l'est, c'est-à-dire vers Bruxelles (17).

Une autre propriété intéressante de la présente méthode est que la distance qui sépare les centres migratoires du centre de gravité démographique de chaque province apporte dans une certaine mesure une indication sur la longueur des migrations effectuées. On voit notamment que les provinces périphériques ont des distances migratoires supérieures aux provinces centrales. Il est intéressant d'observer la faible distorsion dans les directions respectives des immigrations et des émigrations du Brabant mais la différence est déjà plus significative quant aux distances respectives de ces déplacements. Autrement dit, les immigrants viennent de plus loin que ne vont les émigrants de la province de Brabant.

Enfin, la figure 4 indique les centres généraux de masses émigrantes et immigrantes. La droite qui relie le centre général de masses immigrantes à celui des masses émigrantes indique le sens de déplacement du centre de gravité du Royaume pour la période considérée, dû aux migrations internes (18). Les causes qui déterminent le sens de déplacement ont été, rappelons-le, déjà évoquées. A noter également que le sens déterminé par le modèle que nous venons d'appliquer est exact tandis que celui donné sur la figure 1 n'a qu'une valeur indicative.

(17) En possédant ces distances, ou mieux l'ouverture des angles formés par le centre de gravité démographique et les centres de masses migratoires respectifs, et cela pour des pôles à niveaux différents, on pourrait se faire une idée plus exacte sur le problème débattu de migrations à plusieurs temps. Voir à ce sujet notamment J. A. SPORCK, *op cit.*, p. 1.

(18) Voir annexe I.

## IV. — Troisième variante de l'analyse des mouvements migratoires internes La dispersion des migrants

Pour décrire les mouvements migratoires, on a eu recours, dans le § II ci-dessus, à la notion du vecteur pour construire une sorte de champ de forces démographiques indiquant surtout le sens des migrations. Dans le paragraphe précédent, on a surtout étudié les différents types de centres de masses et leurs positions respectives. Cette dernière méthode utile pour décrire une situation d'équilibre et comparer les états successifs d'équilibre, ne rend pas toujours compte des variations dans la répartition de la population, variations qui peuvent se produire même si deux états d'équilibre conduisent à un emplacement identique des centres de masses.

La statistique utilise classiquement la notion de moment du second ordre pour relater la dispersion.

Afin de caractériser l'état de dispersion de la population par rapport à un point et lui conserver la signification directionnelle, nous nous servirons du concept de moment des masses du second ordre relatif à des axes rectilignes passant par ce point.

La mécanique rationnelle connaît cette notion sous la dénomination de moment d'inertie équatorial d'un ensemble plan de répartition des masses par rapport à un axe situé dans ce plan.

Le passage à la notion de dispersion de la population — $D_X$ — relative à un axe X passant par un point est immédiat et s'exprime comme la moyenne des écarts quadratiques des emplacements des populations (masses), par rapport à l'axe choisi, pondérée par le nombre de ces populations (masses).

$$D_x^2 = \frac{\Sigma\ p_i\, y_i^2}{\Sigma\ p_i}$$

(Notion analogue au rayon de giration en mécanique)

Si maintenant, on détermine la dispersion relative à tous les axes passant par un point, et si, à la distance D, on mène les parallèles à ces axes, on obtient une ellipse enveloppe de ces droites (ellipse de Culmann).

Les axes de l'ellipse donnent les directions relatives à une dispersion maximum (petit axe) et minimum (grand axe). Les demi-axes donnent la mesure de ces dispersions extrêmes. Pour cette raison, on peut appeler axes principaux de dispersion les axes de l'ellipse.

Décrire un état de dispersion de la population autour d'un point quelconque du territoire et relatif à tous les axes passant par ce point, revient à tracer une ellipse de Culmann dont le centre est le point considéré.

Si on calcule la dispersion par rapport à une famille d'axes parallèles entre elles, c'est celle relative à l'axe passant par le centre démographique du territoire qui sera la moindre (c'est aussi une des définitions du diamètre de population).

Le centre des masses occupe, parmi tous les points du territoire, une situation privilégiée et fait que l'ellipse de Culmann qui lui est relative est appelée centrale. La dispersion par rapport au grand axe de l'ellipse centrale est plus petite que toute dispersion se référant à d'autres axes du même territoire. Cette propriété du grand axe de l'ellipse centrale lui confère la dénomination d'axe principal de la population.

Le petit axe de l'ellipse centrale est celui par rapport auquel la dispersion est la plus grande parmi toutes les directions passant par le centre démographique du territoire et s'identifie avec l'axe secondaire de la population (19).

Ayant ainsi précisé l'outil analytique servant à la description de la dispersion de la population, nous allons l'appliquer aux mouvements migratoires internes (20).

Chaque province sera caractérisée au point de vue des migrations par les deux ellipses de Culmann. Ces ellipses tracées pour le centre démographique d'une province pris comme centre de ces ellipses se réfèrent respectivement à la dispersion de la population émigrante de cette province et répartie d'après sa destination et la dispersion de l'immigration vers la province répartie d'après sa provenance (voir fig. 5).

Le tracé de ces deux ellipses pour chaque province complète les renseignements obtenus par la description des migrations telle qu'elle était conduite aux paragraphes deux et trois, en apportant des informations sur l'état de dispersion des migrations.

Au sujet de l'état de dispersion de ces populations, on peut de cette façon comparer les migrations de même genre entre les provinces et les migrations de genres opposés pour chaque province.

---

(19) Pour la définition de l'ellipse de dispersion, voir notamment M. CARTON, *Analyse écodémographique d'un territoire. Application à la province de Hainaut*, dans *Le Hainaut économique*, 1962, n° 4.

(20) La démonstration et le calcul mathématique de l'ellipse de dispersion est donnée en annexe 2.

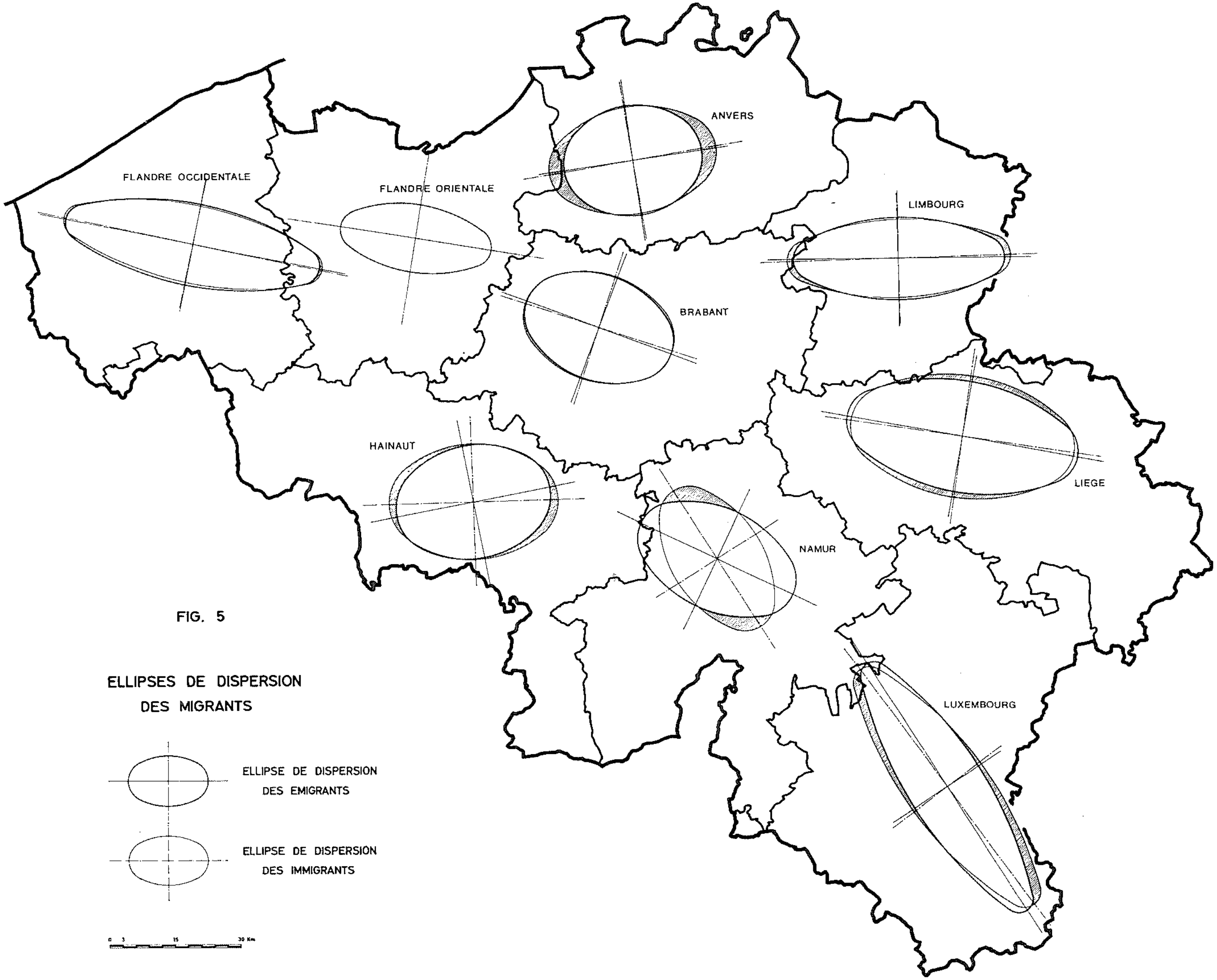

FLANDRE OCCIDENTALE
FLANDRE ORIENTALE
ANVERS
LIMBOURG
BRABANT
HAINAUT
NAMUR
LIEGE
LUXEMBOURG
ELLIPSES DE DISPERSION
DES MIGRANTS
ELLIPSE DE DISPERSION
DES EMIGRANTS
ELLIPSE DE DISPERSION
DES IMMIGRANTS
0 5 15 30 Km

FIG. 5

On rapproche immédiatement la forme des ellipses de la situation géographique. Les provinces excentriques ont des ellipses de dispersion plus allongées. En d'autres termes, la position périphérique de ces provinces fait qu'elles ont une dispersion plus importante selon la direction centripète (c'est-à-dire par rapport à l'axe perpendiculaire à cette direction) que selon la direction perpendiculaire, et cela aussi bien pour les immigrants que pour les émigrants. La forme des ellipses de dispersion n'est donc pas indépendante de la situation géographique du point par rapport auquel on veut calculer les ellipses de Culmann, ni de la forme du territoire étudié. Par exemple, il est normal de voir une faible dispersion pour le Luxembourg belge par rapport aux grands axes de ses ellipses de dispersion, car ces ellipses sont véritablement coincées dans le sud-est du pays, entre les frontières belgo-française et belgo-grand ducale. On note la quasi-coïncidence des ellipses de dispersion pour la Flandre Orientale. Pour les autres provinces, on observe des différences plus ou moins importantes tant pour leur orientation que pour leur superficie.

Pour Namur, on enregistre une assez grande différence dans les dispersions selon les mêmes orientations, différence indiquée par l'angle important que forment les axes respectifs des ellipses de Culmann relatives à cette province. N'a-t-on pas vu lors de la discussion de la précédente carte que la distorsion géographique entre l'origine des immigrants et la destination des émigrants était déjà considérable ?

S'il est vrai que les orientations des axes des ellipses de dispersion de la province d'Anvers coïncident, par contre, on voit que les immigrants selon l'axe principal ont une plus grande dispersion que les émigrants allant dans la même direction.

Enfin, les ellipses de dispersion donnent des renseignements sur la distance moyenne des migrations dans toutes les directions. Le sens reste cependant à préciser. Ceci ne constitue pas un problème quand on connaît un peu le territoire étudié. C'est une propriété, rappelons-le, extrêmement importante des ellipses de dispersion.

## Conclusion

En guise de conclusion, nous voudrions souligner que nous ne croyons avoir épuisé ni le sujet ni même la méthode d'approche esquissée ici. Nous croyons cependant suffisant d'en rester là. Ce que nous désirons, c'est surtout montrer aux géographes l'utilité de méthodes mathématiques rigoureuses. Elles sont nécessaires pour que le géographe puisse aussi comprendre le langage de certains spécialistes avec lesquels il peut être amené à travailler en équipe et que les études géographiques puissent trouver un écho favorable du côté de ces spécialistes.

Les méthodes décrites ci-dessus peuvent être utilisées pour l'étude géographique d'éléments autres et même plus géographiques que la population (21). Les mêmes techniques peuvent être utilisées pour l'étude d'autres types de grandeurs, d'autres stocks et flux engendrés par ces stocks.

Tant que la situation géographique de ces stocks et les flux qui relient ces réservoirs dans l'espace sont sous l'emprise de facteurs géographiques et que, par conséquent, leur explication requiert la connaissance de la géographie de l'espace étudié, le géographe, moyennant une formation complémentaire, reste bien placé pour étudier ces phénomènes.

Enfin, pour en terminer, nous croyons avoir contribué, ne fut-ce que de manière nécessairement partielle, à la connaissance des migrations internes en Belgique.

## ANNEXES

### I. — NOTATIONS ET CALCUL DU DÉPLACEMENT DU CENTRE DÉMOGRAPHIQUE GÉNÉRAL

Notations :

$p_i$ population de la province i avant les migrations.

$C_i$ centre démographique de la province i.

$\sum_i p_i$ = P population totale de l'ensemble des provinces.

$p_{ij}$ population émigrante de la province i vers la province j.

$\sum_j p_{ij} = P_{iE}$ population émigrante de la province i vers l'ensemble des provinces.

$C_{iE}$ centre démographique de la population émigrante de la province i vers l'ensemble des provinces.

$p_{ji}$ population immigrante en i de la province j.

$\sum_j p_{ji} = P_{Ii}$ population immigrante en i de l'ensemble des provinces.

(21) Nous songeons ici à l'étude de l'habitat par exemple, et plus particulièrement au problème de la recherche des indices synthétiques de dispersion et de concentration de l'habitat. Nous envisageons de montrer dans un travail ultérieur que l'utilisation des ellipses de Culmann est un outil plus exact que les indices de dispersion et de concentration relatifs à l'habitat que nous avons pu découvrir dans les publications géographiques. Voir notamment J. TRICART, *Cours de Géographie humaine*, Tome I, Paris, Centre de Documentation Universitaire, pp. 72-74.

$C_{Ii}$ centre démographique de la population immigrante en i de l'ensemble des provinces.

$\sum_i P_{iE} =$ E total de la population émigrante.

$\sum_i P_{Ii} =$ I total de la population immigrante.

$I =$ E la population dans l'ensemble étant numériquement stable.

$C_E$ centre démographique général de la population d'émigration totale.

$C_I$ centre démographique général de la population d'immigration totale.

$G$ centre démographique général de la population avant les migrations.

$G_f$ centre démographique général de la population après les migrations.

Calcul vectoriel du déplacement du centre démographique général à la suite des migrations à partir de la province i et vers cette province :

O désignant un point quelconque on écrira :

$$OC_{iE} = \frac{\sum_j OC_j\, p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

$$\overline{C_iO} + \overline{OC_{iE}} = \overline{C_i\, C_{iE}}$$

$$\overline{C_i\, C_{iE}} \sum_j p_{ij} = \sum_j \overline{OC_j}\, p_{ij} - \overline{OC_i} \sum_j p_{ij}$$

Pareillement

$$\overline{OC_{Ii}} = \frac{\sum_j \overline{OC_j}\, p_{ji}}{\sum_j p_{ji}}$$

$$\overline{OC_i} - \overline{OC_{Ii}} = \overline{C_{Ii}\, C_i}$$

$$\overline{C_{Ii}\, C_i} \sum_j p_{ji} = \overline{OC_i} \sum_j p_{ji} - \sum_j \overline{OC_j}\, p_{ji}$$

$$\overline{R} = \overline{C_i\, C_{iE}} \sum_j p_{ij} + \overline{C_{Ii}\, C_i} \sum_j p_{ji}$$

$$= \overline{OC_i}\ (\sum_j p_{ji} - \sum_j p_{ij}) + \sum_j \overline{OC_j}\ (p_{ij} - p_{ji})$$

$$OG = \frac{\sum_i \overline{OC_i}\, p_i}{p_i}$$

$$OG_{fi} = \frac{\sum_i \overline{OC_i}\, p_i + \overline{OC_i}\ \ (\sum_j p_{ij} - \sum_j p_{ij}) + \sum_j \overline{OC_j}\ (p_{ij} - p_{ji})}{\sum_i p_i}$$

A partir de là, on voit immédiatement que $\overline{OG_{fi}} - \overline{OG} = \overline{GG_{fi}}$ c'est-à-dire le déplacement du centre démographique général à la suite des mouvements migratoires de la province i et vers elle est :

$$\overline{GG_{fi}} = \frac{\overline{R}}{P}$$

Calcul vectoriel du déplacement du centre démographique général à la suite des migrations dans l'ensemble des provinces :
$C_E$ peut être considéré comme le centre de masse des points $C_i$ affectés des coefficients $\sum_j p_{ji}$ tandis que $C_I$ est le centre de masses des points $C_i$ affectés des coefficients $\sum_j p_{ij}$.
On a donc, O désignant un point quelconque :

$$\overline{OC_E} = \frac{\sum_i (\sum_j p_{ij})\ \overline{OC_i}}{\sum_{ij} p_{ji}}$$

$$= \qquad\qquad \sum_{ij} p_{ji} = E = I$$

$$\overline{OC_I} = \frac{\sum_i (\sum_j p_{ij})\ \overline{OC_i}}{\sum_{ij} p_{ji}}$$

La population initiale de la province i étant $p_i$, la population finale est $p_i + \sum_j p_{ji} - \sum_j p_{ij}$, si bien que si G et $G_f$ désigne le centre de masse général initial et final on a :

$$\overline{OG} = \frac{\sum_i p_i\ \overline{OC_i}}{\sum_i p_i}$$

et

$$\overline{OG_f} = \frac{\sum_i (p_i + \sum_j p_{ji} - \sum_j p_{ij})\ \overline{OC_i}}{\sum_i p_i} \qquad \text{ou} \quad \sum_i p_i = P$$

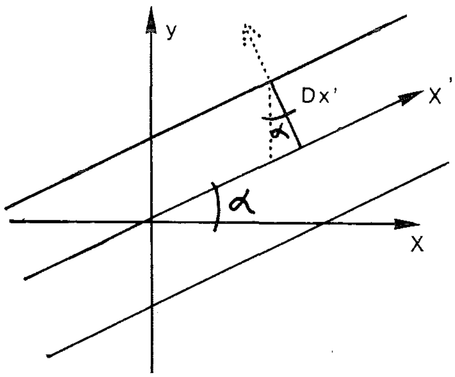
A partir de là, on voit de suite que $\overline{OG_f} - \overline{OG} = \dfrac{E}{P}\ (\overline{OC_E} - \overline{OC_I})$

soit $\overline{GG_f} = \overline{C_I C_E}\ \dfrac{E}{P}$.

Il est commode pour faciliter les calculs tant manuels que mécanographiques de grouper les données nécessaires à la détermination des centres de masses dans les tableaux matriciels.
Ainsi, par exemple, on formera une matrice carrée des nombres de population migrante suivant le schéma ci-dessous. On procédera pareillement pour les vecteurs des coordonnées des centres des provinces traitant suivant les calculs les ordonnées ou les abcisses comme des vecteurs lignes ou colonnes. Les opérations simples sur les matrices ainsi formées permettent alors de systématiser les calculs.

| | | i | j | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p 11 | p 12 | | | | P1n | $\sum$ Pli = P1E |
| p 21 | p 22 | | | | P2n | |
| | | | | | | |
| | | | Pij | | | |
| | | Pji | | | | |
| Pn1 | Pn 2 | | | | Pnn | ▼ |
| $\sum$ Pi1 = <br> i <br> = Pl1 | | | | | ► | E <br> I |

II. — ELLIPSE DE DISPERSION : DEMONSTRATION ET CALCUL




Supposons connu les moments des masses du second ordre par rapport au système des coordonnées rectangulaires (x,y), à savoir

$J_x = \Sigma\, p_i y_i^2$ ; $J_y = \Sigma\, p_i x_i^2$ ;

$J_{xy} = \Sigma\, p_i\, x_i\, y_i$

Le moment du second ordre par rapport à un axe x′ incliné de $\alpha$ sur l'axe x est donné par : $J_x = \Sigma\, p_i\, y'^2_i$. Mais $y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha$.

Alors : $J_{x'} = \Sigma\, p_i y_i^2 \cos^2\alpha + \Sigma\, p_i x_i^2 \sin^2\alpha - 2\,\Sigma\, p_i\, x_i\, y_i \cos\alpha \sin\alpha$

$$= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\,\alpha$$

Appelons $D_{x'}$ l'indice moyen de la dispersion par rapport à l'axe x′ passant par le point (O, O).

$$D^2_{x'} = \frac{J_{x'}}{\Sigma\, p_i}$$

Traçons de part et d'autre de l'axe x′ les parallèles à cet axe et distantes de $D_{x'}$

L'équation de ces droites s'écrira : $y \cos\alpha - x \sin\alpha = \pm D_{x'}$

Alors $D^2_{x'} = y^2 \cos^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha - 2\,xy \sin\alpha \cos\alpha$

D'autre part : $D^2_{x'} = D^2_x \cos^2\alpha + D^2_y \sin^2\alpha - D^2_{xy} \sin 2\alpha$

En soustrayant :

$$(y^2 - D^2_x) \cos^2\alpha + (x^2 - D^2_y) \sin^2\alpha - (xy - D^2_{xy}) \sin 2\,\alpha = 0 \quad (1)$$

Faisant varier l'angle $\alpha$ nous pouvons chercher la courbe enveloppe de ces droites en éliminant $\alpha$ entre l'équation (1) et celle obtenue en annulant la dérivée de son premier membre, par rapport à $\alpha$ qui s'écrit :

$$-2\,(y^2 - D^2_x) \sin\alpha \cos\alpha + 2\,(x^2 - D^2_y) \sin\alpha \cos\alpha -$$
$$- 2\,(xy - D^2_{xy}) \cos 2\,\alpha = 0 \quad (2)$$

L'élimination du paramètre $\alpha$ entre les équations (1) et (2) donne :

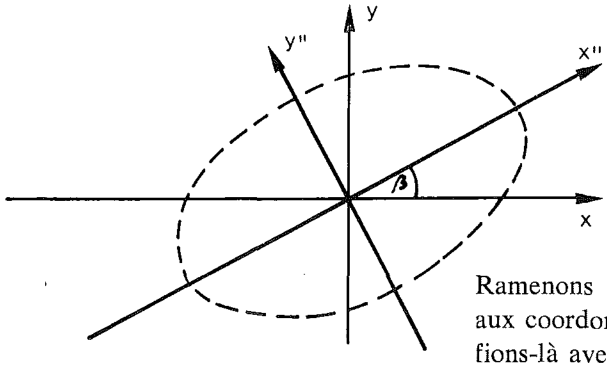
$$(y^2 - D^2_x)\,(x^2 - D^2_y) - (xy - D^2_{xy})^2 = 0$$

C'est-à-dire

$$x^2 D^2_x + y^2 D^2_y - 2\,xy\, D^2_{xy} = D^2_x D^2_y - D^4_{xy} \quad (3)$$

L'équation (3) est une équation de l'ellipse rapporté à son centre. Si nous normalisons cette équation par rotation de système d'axes de manière à le faire coïncider avec les axes de symétrie de l'ellipse nous aurons l'expression canonique suivante :

$$x''^2\, D^2_{x''} + y''^2\, D^2_{y''} = D^2_{x''}\, D^2_{y''} \tag{4}$$




Ramenons cette équation (4) aux coordonnées (x, y) et identifions-là avec l'équation (3)

$$x^2\,(D^2_{x''}\cos^2\beta + D^2_{y''}\sin^2\beta) + y^2\,(D^2_{x''}\sin^2\beta + D^2_{y''}\cos^2\beta) -$$

$$- 2\,xy\,(D^2_{x''}\cos\beta\,\sin\beta - D^2_{y''}\cos\beta\,\sin\beta) = D^2_{x''}\,D^2_{y''} \tag{4'}$$

$$x^2\,D^2_x + y^2\,D^2_y - 2\,xy\,D^2_{xy} = D^2_y\,D^2_y - D^4_{xy} \tag{3}$$

on aura

$$D^2_x = D^2_{x''}\cos\beta + D^2_{y''}\sin^2\beta$$

$$D^2_y = D^2_{x''}\sin\beta + D^2_{y''}\cos^2\beta$$

$$D^2_{xy} = D^2_{x''}\sin\beta\,\cos\beta - D^2_{y''}\sin\beta\,\cos\beta$$

A partir de ces relations on peut déterminer les demi-axes de l'ellipse et l'orientation de ces axes par rapport au système de référence (tg 2β).

$$D^2_{y''} = \frac{D^2_x + D^2_y}{2} + \frac{D^2_x - D^2_y}{2\cos 2\beta}$$

$$D^2_{x''} = \frac{D^2_x + D^2_y}{2} - \frac{D^2_x - D^2_y}{2\cos 2\beta}$$

$$\mathrm{tg}\ 2\,\beta = \frac{2\,D^2_{xy}}{D^2_x - D^2_y}$$

Ceci nous donne la direction à suivre pour le calcul des ellipses de Culmann. Il suffit en effet de connaître par rapport à un système des coordonnées rectangles quelconque les valeurs $D_x$ ; $D_y$ ; $D_{xy}$, pour pouvoir tracer l'ellipse de Culmann se référant au centre (O, O).

Etant donné un système plan de répartition des masses choisissons des axes rectangulaires (x ; y ;) quelconque dans ce plan.
Ecrivons la dispersion relative à l'axe x :

$$D_x^2 = \frac{\Sigma\, p_i\, y_i^2}{\Sigma\, p_i}$$

Cherchons quelle est la position de la droite parallèle à x donnant la dispersion minimum :

$$\frac{d}{dy}\ \frac{\Sigma\, p_i\ (y_i - y)^2}{\Sigma\, p_i} = 0$$

c'est-à-dire :

$$2\, y\, \Sigma\, p_i - 2\, \Sigma\, p_i\, y_i = 0$$

$$y = \frac{\Sigma\, p_i\, y_i}{\Sigma\, p_i}$$

La droite donnant la dispersion minimum relative à la direction x passe donc par le centre des masses. N'ayant fait aucune réserve quant à l'orientation de x cette constatation est valable pour toutes directions et peut servir d'une définition du diamètre de territoire.
La même condition réalisée en particulier pour la direction orthogonale à x fournira l'autre coordonnée de centre de masses.
La condition du minimum de la dispersion polaire

$$D_p^2 = \frac{\Sigma\, p_i\ [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]}{\Sigma\, p_i}$$

se confond avec les 2 conditions précédentes et forme encore une autre définition du centre de masses.