Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 74, (4-5), 2005, pp. 239-248

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DE $\mathbb{R}^3$

*MOHAMED SAID MOULAY AND **AHMED BERBOUCHA

ABSTRACT. In this work, we consider a three-dimensional differential system with a parameter α. Following the values of α, we study the existence and the nonexistence of periodic solutions for the system.

Résumé. Dans ce travail, on considère un système différentiel dans $\mathbb{R}^3$, dépendant d'un paramètre α. On étudie, suivant les valeurs de ce paramètre, l'existence et la non-existence de solutions périodiques pour ce système.

1. INTRODUCTION

Dans ce travail on considère le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x - f(y) \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha y - f(z) \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha z - f(x) \end{aligned} \right. \tag{1.1}$$

Ce système modélise des réactions chimiques en chaîne.

Notre but est d'étudier, suivant les valeurs de α, l'existence et la non-existence de solutions périodiques pour ce système.

Par des méthodes classiques O. Arino et A.A. Cherif [1] ont montré que pour $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, ce système admet au moins une solution périodique.

Pour les systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^2$, la théorie de Poincaré-Bendixson est bien indiquée pour l'étude de l'existence ou de la non-existence de solutions périodiques.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34C05, 34C15, 34D20.
Key words and phrases. Système différentiel, Solutions périodiques.

Ces dernières années, des auteurs ont, en introduisant des hypothèses supplémentaires, généralisé les théorèmes de Poincaré et Bendixson, concernant l'existence et la non-existence de solutions périodiques, à des systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^n$ avec $n > 2$ (voir [2, 4, 5, 6, 8]).

Dans ce qui suit nous allons, en utilisant les résultats théoriques de R.A. Smith et ceux de Y. Li and J.S. Muldowney, montrer pour le système (1.1) l'existence de solutions périodiques orbitalement stables pour certaines valeurs du paramètre α et la non-existence de solutions périodiques pour d'autres valeurs de ce paramètre.

2. Bref exposé de la théorie de R.A. Smith

Considérons l'équation différentielle autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1}$$

où $f : S \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur un ouvert S de $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'équation (2.1) satisfait les deux hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) Il existe des constantes positives λ, ε et une matrice P de type $n \times n$, constante, réelle, symétrique, non singulière, avec 2 valeurs propres négatives et $n-2$ valeurs propres positives telle que

$$(x-y)^* P\left[f(x) - f(y) + \lambda(x-y)\right] \leq -\varepsilon \left|x-y\right|^2, \forall x, y \in S.$$

où $(x-y)^*$ est le vecteur transposé de $(x-y)$ et $|x-y|$ est la norme euclidienne du vecteur $(x-y)$

($\mathbf{H}_2$) Il existe un sous-ensemble ouvert D borné de $\mathbb{R}^n$ positivement invariant avec fermeture $\overline{D} \subset S$ tel que sa frontière ∂D entoure toute orbite de (2.1) qui la rencontre.

Cette dernière hypothèse signifie que si $x(t)$ est une solution de (2.1) telle que $x(t_0) \in \partial D$ alors $x(t) \in \overline{D}$ pour tout $t > t_0$ et il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t) \in D$ pour tout $t > t_1$. En particulier si $S = \mathbb{R}^n$ et l'équation (2.1) est dissipative alors ($\mathbf{H}_2$) est vérifiée.

Définition 2.1. *On dit que l'équation* (2.1) *est dissipative s'il existe une constante $b > 0$ et une fonction $\tau : (0, \infty) \to (0, \infty)$ telle que toute solution x de* (2.1) *qui vérifie $|x(t_0)| \leq \rho$ existe pour $t_0 \leq t < +\infty$ et vérifie $|x(t)| < b$ pour $t > t_0 + \tau(\rho)$.*

Si on choisit $\rho > b$ et on prend pour D, l'union de toutes les semi-orbites qui au temps t_0 sont dans la boule $|x| < \rho$, alors D est un ouvert borné satisfaisant ($\mathbf{H}_2$).

Théorème 2.2. *(voir [8]) Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait* ($\boldsymbol{H}_1$) *et* ($\boldsymbol{H}_2$) *et* D *contient un seul point critique* k. *Supposons de plus que* f *soit continûment différentiable dans un voisinage de* k *avec* $Rez_2 > 0 > Rez_3$ *où* $z_1, z_2, ..., z_n$ *sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de* f *au point* k *arrangées dans l'ordre :* $Rez_1 \geq Rez_2 \geq ... \geq Rez_n$. *Alors toute semi-orbite dans* D *converge soit vers* k *soit vers une trajectoire fermée quand* $t \to +\infty$ *et* D *contient au moins une trajectoire fermée qui soit orbitalement stable. Si de plus* f *est analytique dans* S *alors* D *contient seulement un nombre fini de trajectoires fermées et au moins une d'elles est asymptotiquement orbitalement stable.*

3. Conditions suffisantes pour que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées

Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\Phi(Cx) \tag{3.1}$$

où A, B, C sont des matrices réelles et constantes de type $n \times n, n \times r, s \times n$, respectivement et Φ une fonction continue de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^r$. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ et $CS = \{Cx : x \in S\}$ alors $CS \subset \mathbb{R}^s$. On suppose qu'il existe une constante $\Lambda(CS) \geq 0$ telle que

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| \leq \Lambda(CS)\,|\xi_1 - \xi_2| \ \ \forall \xi_1, \xi_2 \in CS \tag{3.2}$$

La matrice de type $r \times s$

$$\chi(z) = C(zI - A)^{-1}B \tag{3.3}$$

et appelée la matrice de transfert de (3.1), elle est définie pour tout complexe z tel que

$$\det(zI - A) \neq 0$$

Si A n'a pas de valeur propre z telle que $Rez = -\lambda$, alors on peut définir

$$\mu(\lambda) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\chi(i\omega - \lambda)| \tag{3.4}$$

Le lemme suivant est un cas particulier du théorème 10 de [7].

Lemme 1. *Supposons que la matrice* A *ait* 2 *valeurs propres* z *qui vérifient*
$Rez > -\lambda$ *et* $n-2$ *valeurs propres* z *telles que* $Rez < -\lambda$. *Si* (3.2) *est vérifiée avec* $\Lambda(CS) < \mu(\lambda)^{-1}$, *alors il existe une constante* $\varepsilon > 0$ *et une matrice* P, *de type* $n \times n$, *constante, réelle, symétrique et non singulière telle que* ($\boldsymbol{H}_1$) *soit vérifiée avec* $f(x) = Ax + B\Phi(Cx)$.

Remarque 2. *L'équation* (2.1) *peut s'écrire sous la forme de l'équation* (3.1) *en posant,*

$$\Phi(y) = B^{-1}\left[f(C^{-1}y) - AC^{-1}y\right]$$

où A, B *et* C *sont des matrices arbitraires de type* $n \times n$.

Pour vérifier l'hypothèse ($\mathbf{H}_2$), Pliss [3] nous donne une condition suffisante pour que l'équation (3.1) soit dissipative.

Proposition 1. *Une condition suffisante pour que l'équation* (3.1) *soit dissipative est qu'il existe une matrice constante* L *de type* $r \times s$ *telle que*

$$|\xi|^{-1}\left[\Phi(\xi) - L\xi\right] \to 0, \text{ quand } |\xi| \to \infty \tag{3.5}$$

et $Re z < 0$ *pour toutes les valeurs propres* z *de la matrice* $A + BLC$.

4. Existence de solutions périodiques

Dans ce paragraphe nous allons montrer que pour certaines valeurs du paramètre α le système différentiel (1.1) admet au moins une solution périodique orbitalement stable.

Théorème 4.1. *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

1) $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$,

2) $f \in C^1(\mathbb{R}),\quad f'(0) = 1$ *et* $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x}{2} - f(x)}{x} = 0.$

Alors, le système (1.1) *admet au moins une solution périodique orbitalement stable.*

Démonstration : Pour démontrer le théorème 4.1, nous allons vérifier qu'avec les hypothèses qu'on a, le système (1.1) vérifie les hypothèses ($\mathbf{H}_1$) et ($\mathbf{H}_2$) et donc il suffira d'appliquer le théorème 2.2.

Ecrivons d'abord le système (1.1) sous la forme (3.1) en posant $A = J(0), B = C = I_3$ où $J(0)$ est la matrice jacobiènne du second membre de (1.1), prise en $x = 0$. On a alors

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

et on obtient

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - f(x_2) \\ x_3 - f(x_3) \\ x_1 - f(x_1) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Avant de poursuivre la démonstration nous allons d'abord montrer quelques lemmes.

Lemme 3. *Avec* $\lambda = \alpha > 0$, *on a :* $\mu(\lambda) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\chi(i\omega - \lambda)| = 2$ *et* $\mu(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

Preuve: C'est un calcul de la norme spectrale (compatible avec la norme euclidinne de $\mathbb{R}^n$) de la matrice $[(i\omega - \lambda)I - A]^{-1}$ en posant $\lambda = \alpha$. En effet on a

$$(i\omega - \lambda)I - A = \begin{pmatrix} i\omega & 1 & 0 \\ 0 & i\omega & 1 \\ 1 & 0 & i\omega \end{pmatrix}$$

et

$$[(i\omega - \lambda)I - A]^{-1} = \frac{1}{1 - i\omega^3}\begin{pmatrix} -\omega^2 & -i\omega & 1 \\ 1 & -\omega^2 & -i\omega \\ -i\omega & 1 & -\omega^2 \end{pmatrix} = Q$$

La norme de la matrice Q est la racine carré de la plus grande valeur propre de Q^*Q où Q^* est la matrice adjointe de Q . On cherche $\mu(\lambda) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |Q|$.

$$Q^*Q = \frac{1}{1+\omega^6}\begin{pmatrix} \omega^4+\omega^2+1 & -\omega^2+i(\omega^3+\omega) & -\omega^2-i(\omega^3+\omega) \\ -\omega^2-i(\omega^3+\omega) & \omega^4+\omega^2+1 & -\omega^2+i(\omega^3+\omega) \\ -\omega^2+i(\omega^3+\omega) & -\omega^2-i(\omega^3+\omega) & \omega^4+\omega^2+1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de cette matrice sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\omega^4 - \omega^2 + 1}{1+\omega^6} \\ \lambda_2 &= \frac{\omega^4 - \sqrt{3}\omega^3 + 2\omega^2 - \sqrt{3}\omega + 1}{1+\omega^6} \\ \lambda_3 &= \frac{\omega^4 + \sqrt{3}\omega^3 + 2\omega^2 + \sqrt{3}\omega + 1}{1+\omega^6} \end{aligned}$$

On a $\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\lambda_1(\omega)| = \lambda(0) = 1$ et $\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\lambda_2(\omega)| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\lambda_3(\omega)| = \lambda_2(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \lambda_3(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 4$. D'où $\mu(\lambda) = \sqrt{4} = 2$ et $\mu(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{2}$.■

Lemme 4. *Pour que le système* (1.1) , *écrit sous la forme* (3.1) , *vérifie les hypothèses du lemme 1, il suffit que* $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve: Sous la forme (3.1) le système (1.1) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \Phi(x) \tag{4.3}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad et \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} x_2 - f(x_2) \\ x_3 - f(x_3) \\ x_1 - f(x_1) \end{pmatrix}$$

Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, il suffit d'avoir $|\Phi'(x)| \leq \Lambda(\mathbb{R}^3)$ pour que (3.2) soit vérifiée, où $\Phi'(x)$ désigne la jacobienne de Φ en x.

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - f'(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - f'(x_3) \\ 1 - f'(x_1) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

et

$$|\Phi'(x)| = \sup_{i=1,2,3} |1 - f'(x_i)|$$

En prenant $\Lambda(\mathbb{R}^3) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |1 - f'(x)|$, on aura $\Lambda(\mathbb{R}^3) < \mu(\lambda)^{-1}$ quand $|1 - f'(x)| < \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 &= -\alpha + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_3 &= -\alpha - 1 \end{aligned}$$

Avec $\lambda = \alpha$ la matrice A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $Re\lambda_i > -\lambda$ et une valeur propre λ_3 telle que $Re\lambda_3 < -\lambda$.■

Lemme 5. *Pour que le système* (1.1) *soit dissipatif, il suffit d'avoir* $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{2} - f(x)}{x} = 0$.

Preuve: C'est une conséquence immédiate de la proposition 1, en posant

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet on a

$$(4.5)\quad \Phi(x) - Lx = \begin{pmatrix} x_2 - f(x_2) \\ x_3 - f(x_3) \\ x_1 - f(x_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x3}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} - f(x_2) \\ \frac{x_3}{2} - f(x_3) \\ \frac{x_1}{2} - f(x_1) \end{pmatrix}$$

$$(4.6)\qquad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{-1}\left[\Phi(x) - Lx\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2} - f(x)}{x} = 0$$

De plus les valeurs propres de-$A + BLC$ sont les valeurs propres de

$$(4.7)\qquad A + L = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\alpha & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

qui sont

$$(4.8)\quad \lambda_1 = -\alpha - \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\alpha + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \lambda_3 = -\alpha + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Pour avoir $Re\lambda_i < 0\ \forall i = 1, 2, 3$ on doit avoir $\alpha > \frac{1}{4}$.■

Des lemmes 3, 4, 5, on déduit que sous les hypothèses du théorème 4.1, le système (1.1) vérifie les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$.

Pour terminer la démonstration du théorème 4.1, il suffit de vérifier que l'ensemble D pour lequel on vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, contient un seul point critique k et que la matrice jacobienne du second membre du système (1.1) au point k a ses valeurs propres telles que : $Rez_1 \geq Rez_2 > 0 > Rez_3$. Pour cela, observons d'abord que l'équation (1.1) n'admet comme point critique que le point 0 et que la matrice jacobienne du second membre du système (1.1) en ce point est précisément la matrice A dont les valeurs propres sont telles que : $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = -\alpha + \frac{1}{2} > 0$ si $\alpha < \frac{1}{2}$, et $Re\lambda_3 = -\alpha - 1 < 0$.

Si on prend $\rho > b$ et D l'ensemble de toutes les semi-orbites qui à un temps t_0 sont dans la boule $|x| < \rho$ alors D vérifie $(\mathbf{H}_2)$ et $0 \in D$. Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées et donc le système (1.1) admet au moins une solution périodique orbitalement stable. Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

5. Non-existence de solutions périodiques

Grâce à sa technique de réduction, R.A. SMITH [4] a pu généraliser le théorème de Bendixson, de non existence de solution périodiques non triviales à des systèmes d'ordre $n > 2$ (voir théorème 4 dans [4]). Y. LI et J.S MULDOWNEY [2] ont pu, en utilisant d'autres techniques, prouver un résultat qui englobe celui de R.A. SMITH. Ils ont montré le théorème suivant

Théorème 5.1. *(voir [2]) Considérons les conditions suivantes :*

$i)$ $\sup\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_r}\right|+\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right) : 1\leqslant r<s\leqslant n\right\}<0$

$ii)$ $\sup\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_r}{\partial x_q}\right|+\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_q}\right|\right) : 1\leqslant r<s\leqslant n\right\}<0$

$iii)$ $\lambda_1+\lambda_2<0$

$iv)$ $\inf\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_r}\right|+\left|\frac{\partial f_q}{\partial x_s}\right|\right) : 1\leqslant r<s\leqslant n\right\}>0$

$v)$ $\inf\left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_r}+\frac{\partial f_s}{\partial x_s}+\sum_{q\neq r,s}\left(\left|\frac{\partial f_r}{\partial x_q}\right|+\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_q}\right|\right) : 1\leqslant r<s\leqslant n\right\}>0$

$vi)$ $\lambda_{n-1}+\lambda_n>0$,

où $\lambda_1\geqslant\ \lambda_2\geqslant\ \ldots\geqslant\ \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*+\frac{\partial f}{\partial x}\right)$;

$\frac{\partial f}{\partial x}$ *désigne la matrice jacobienne de* f *et* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*$ *sa transposée.*

Si l'une quelconque des conditions (i) - (vi) *est vérifiée sur* $\mathbb{R}^n$, *il ne peut exister d'arc fermé rectifiable pour l'équation*

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \text{ où } x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

N.B $(i)\Leftrightarrow(ii)\Leftrightarrow(iii)$ et $(iv)\Leftrightarrow(v)\Leftrightarrow(vi)$.

La condition (iii) est la même que celle dans le théorème 4 de [4]. En utilisant ce résultat nous montrons le théorème suivant

Théorème 5.2. *Considérons le système* (1.1) *où* α *est un paramètre réel et* $f \in C^1(\mathbb{R})$. *Si* $|\alpha| > \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f'(x)|}{2}$ *alors le système* (1.1) *n'admet pas de solutions périodiques "non triviales".*

Démonstration : Le système (1.1) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x - f(y) \\ -\alpha y - f(z) \\ -\alpha z - f(x) \end{pmatrix} = G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \\ g_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

La condition (i) du théorème 5.1 est équivalente à

$$\sup \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_3}{\partial y} \right| : x, y \in \mathbb{R} \right\} < 0$$

qui s'écrit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \{-\alpha - \alpha + |-f'(x)|\} < 0$$

ou encore

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| - 2\alpha < 0$$

c'est à dire

$$\alpha > \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f'(x)|}{2}$$

La condition (iv) du théorème 5.1 est équivalente à

$$\inf \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} - \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial g_3}{\partial y} \right| : x, y \in \mathbb{R} \right\} > 0$$

qui s'écrit

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \{-\alpha - \alpha - |-f'(x)|\} > 0$$

ou encore

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} (-|f'(x)|) - 2\alpha > 0$$

c'est à dire

$$\alpha < -\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f'(x)|}{2}$$

d'où le résultat du théorème.

References

[1] O. ARINO and A.A. CHERIF, *More on ordinary differential equations which yield periodic solutions of delay differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 180 (1993) pp 361-385.

[2] Y. LI and J.S. MULDOWNEY, *On Bendixson's criterion.* J. Differential Equations, 106 (1993) pp 27-39.

[3] V.A. PLISS, *Nonlocal problems of the theory of oscillation*, Academic press, New York, 1966.

[4] R.A. SMITH, *The Poincaré-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A, 83 (1979) pp 63-79.

[5] R.A. SMITH, *Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 85 (1980) pp 153-172.

[6] R.A. SMITH, *Poincaré index theorem concerning periodic orbits of differential equations*, Proc. London Math. Soc. (3). 48 (1984) pp 341-362.

[7] R.A. SMITH, *Some applications of Hausdorff dimension inequalities for ordinary differential equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh sect A 104 (1986) pp 235-259.

[8] R.A. SMITH, *Orbital stability for ordinary differential equations*, J. Differential Equations, 69 (1987) pp 265-287.

*King Khalid University, College of Science, P.O. Box 9004 Abha, Saudi Arabia and Département d'analyse, Faculté des Mathématiques, U. S. T. H. B, Algérie

**Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université A. MIRA - Béjaia, Algérie.

E-mail address: aberboucha@yahoo.fr