Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 37e année, n° 11-12, 1968, pp. 551-556

SUR UNE DÉMONSTRATION DU « BANG-BANG PRINCIPLE »

par J. ÉTIENNE (*)

SUMMARY

A direct proof of classical bang-bang principle in controllability for linear systems is given.

This one was suggested by a result of Robertson-Kingman [3] *and generalised by* De Wilde [2].

Only elementary notions of functional analysis are required.

1. — Désignons par

$$\Delta(t) = (\Delta_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_i(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(t) \end{pmatrix} = (C_1(t) \ldots C_j(t) \ldots C_m(t))$$

une matrice $n \times m$ dont les éléments $\Delta_{ij}(t)$ sont des fonctions définies *pp* sur $[a, b]$ à valeurs réelles et intégrables sur $[a, b]$.

Si

$$U = \{u \in E_m : | u^i | \leqslant 1, \ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

et

$$\widetilde{U} = \{u \in E_m : | u^i | = 1, \ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

nous considérons les ensembles $\mathscr{U}$ [resp. $\widetilde{\mathscr{U}}$] des fonctions $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t))$ définies *pp* sur $[a, b]$, mesurables et à valeurs dans U [resp. $\widetilde{U}$].

Théorème 1.

$$K_U \equiv \{ \int_a^b \Delta(t)u(t)dt : u(t) \in \mathscr{U} \} = \{ \int_a^b \Delta(t)u(t)dt : u(t) \in \widetilde{\mathscr{U}} \} \equiv K_{\widetilde{U}}$$

Cette proposition est l'analogue du « bang-bang principle » classique dans la théorie de la contrôlabilité des systèmes linéaires.

(*) Présenté par H. G. Garnir, le 19 décembre 1968.

Évidemment, $K_{\tilde{U}} \subset K_U$.

Réciproquement, soit

$$\int_a^b \Delta(t) u_0(t) dt \in K_U,$$

où $u_0(t) \in \mathscr{U}$ et considérons l'ensemble

$$\mathscr{U}_0 = \{u(t) \in \mathscr{U} : \int_a^b \Delta(t) u(t) dt = \int_a^b \Delta(t) u_0(t) dt\}.$$

Comme nous verrons ultérieurement (cf. lemme 3), cet ensemble est convexe et possède un élément extrémal $u^*(t)$ pour lequel il ne peut donc exister $u_1(t), u_2(t) \in \mathscr{U}_0$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$u^*(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t).$$

Nous allons montrer que $u^*(t) \in \tilde{\mathscr{U}}$, c'est-à-dire que $u^*(t)$ est à valeurs dans $\tilde{\mathscr{U}}$, exception faite éventuellement des valeurs prises sur un ensemble négligeable de $[a, b]$.

Il suffit de prouver que

$$e = \{t \in [a, b] : | [u^*(t)]^j | \leqslant 1 - \varepsilon\}$$

est négligeable, quels que soient fixés $j = 1, \ldots, m$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Raisonnons par l'absurde. Si e n'est pas négligeable, décomposons-le en $(n + 1)$ sous-ensembles non-négligeables et disjoints $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Il existe alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_{e_i} C_j(t) dt = 0.$$

En posant

$$| \lambda | = \max_i | \lambda_i |,$$

et

$$\alpha(t) = (0, \ldots, \alpha^j(t), \ldots, 0),$$

où

$$\alpha^j(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon \lambda_i}{| \lambda |} \delta_{e_i}(t),$$

les fonctions $u^* \pm \alpha$ sont mesurables et à valeurs dans U et

$$\int_a^b \Delta(t) \alpha(t) dt = \int_a^b \alpha^j(t) C_j(t) dt = 0,$$

c'est-à-dire que $u^* \pm \alpha \in \mathscr{U}_0$.

Mais alors

$$u^* = \frac{1}{2}(u^* + \alpha) + \frac{1}{2}(u^* - \alpha)$$

ne serait plus un élément extrémal de $\mathscr{U}_0$.

Théorème 2.

K_U *est compact et convexe dans* E_n.

La convexité de K_U est évidente et dépend de celle de $\mathscr{U}$.

Cet ensemble est aussi borné car

$$\left| \int_a^b \Delta(t)u(t)dt \right| \leqslant \sqrt{n} \int_a^b |\Delta(t)|\, dt.$$

Il reste à prouver que K_U est fermé.

Soit $\{x_r = \int_a^b \Delta(t)u_r(t)dt\} \subset K_U$ telle que $\lim_r x_r = x$.

Vu les lemmes (1) et (2), il existe une sous-suite $\{x_{r_k}\}$ et $u \in \mathscr{U}$ tels que

$$x = \lim_k x_{r_k} = \lim_k \int_a^b \Delta(t)u_{r_k}(t)dt = \int_a^b \Delta(t)u(t)dt,$$

d'où $x \in K_U$.

Corollaire : (Théorème de Lyapounov).

Si $\Delta(t) = (\Delta^1(t), \ldots, \Delta^n(t))$ *avec* $\Delta^i(t) \in L_1[a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, *alors*

$$\{\int_e \Delta(t)dt \ : e \text{ sous-ensemble mesurable de } [a, b]\}$$

est compact convexe dans E_n.

2. — Dans ce qui suit, nous désignons par L_2 l'ensemble des fonctions $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t))$ définies *pp* sur $[a, b]$, à valeurs dans E_m et dont les composantes sont de carré sommable sur $[a, b]$.

Le produit scalaire de deux éléments u_1 et u_2 de L_2 est défini par

$$(u_1, u_2)_{L_2} = \int_a^b (u_1(t), u_2(t))_{E_m} dt.$$

Évidemment $\mathscr{U} \subset L_2$ et y est borné.

Les lemmes qui suivent restent valables si U est un compact convexe quelconque de E_m.

Lemme 1. — *$\mathscr{U}$ est convexe et faiblement compact dans L_2 c'est-à-dire que de toute suite $\{u_r\}$ de $\mathscr{U}$ on peut extraire une sous-suite $\{u_{r_k}\}$ et trouver $u \in \mathscr{U}$ tels que*

$$\lim_k \int_a^b (\alpha(t), u_{r_k}(t))dt = \int_a^b (\alpha(t), u(t))dt,$$

quel que soit $\alpha(t) \in L_2$.

La convexité de $\mathscr{U}$ est immédiate et dépend de celle de U.

Toute suite $\{u_r\}$ de $\mathscr{U}$ étant bornée dans L_2 est faiblement extractable. Il reste à prouver que $\mathscr{U}$ est faiblement fermé. Vu sa convexité, il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est fermé dans L_2 ce qui est immédiat puisque toute suite convergente dans L_2 contient une sous-suite convergente *pp*.

Lemme 2. — *Si la suite* $\{u_k\}$ *de* $\mathcal{U}$ *converge faiblement vers* u *dans* L_2, *alors*

$$\lim_k \int_a^b \Delta(t)u_k(t)dt = \int_a^b \Delta(t)u(t)dt.$$

Il suffit évidemment de vérifier que

$$\lim_k \int_a^b (L_i(t), u_k(t))dt = \int_a^b (L_i(t), u(t))dt,$$

quel que soit $i = 1, \ldots, n$.

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant fixé arbitrairement petit, il existe une fonction $\alpha(t)$ de composantes étagées sur $[a, b]$, donc dans L_2, telle que

$$\int_a^b | L_i - \alpha | dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sqrt{n}}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} &| \int_a^b [(L_i, u_k) - (L_i, u)]\, dt | \\ &\qquad = | \int_a^b \{(L_i - \alpha, u_k) - (L_i - \alpha, u) + [(\alpha, u_k) - (\alpha, u)]\}\, dt |, \\ &\qquad \leqslant 2\sqrt{n} \int_a^b | L_i - \alpha | \,dt + | \int_a^b [(\alpha, u_k) - (\alpha, u)]\, dt | \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

à condition de prendre k suffisamment grand pour que

$$| \int_a^b [(\alpha, u_k) - (\alpha, u)]\, dt | \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui est possible vu la convergence faible de $\{u_k\}$ vers u.

Lemme 3. — *Si* $u_0(t) \in \mathcal{U}$ *est fixé, l'ensemble*

$$\mathcal{U}_0 = \{u(t) \in \mathcal{U} : \int_a^b \Delta(t)u(t)dt = \int_a^b \Delta(t)u_0(t)dt\}$$

est convexe, faiblement compact dans L_2 *et contient un élément extrémal* $u^*(t)$.

$\mathcal{U}_0$ *est convexe* car, si u_1 et $u_2 \in \mathcal{U}_0$, alors $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in \mathcal{U}$, quel que soit $\lambda \in [0, 1]$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b \Delta(t)\, [\lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t)]\, dt &= \lambda \int_a^b \Delta(t)u_1(t)dt + (1 - \lambda) \int_a^b \Delta(t)u_2(t)dt \\ &= \int_a^b \Delta(t)u_0(t)dt. \end{aligned}$$

$\mathcal{U}_0$ *est faiblement compact* car de toute suite $\{u_r\}$ de $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ (cf. lemme 1), on peut extraire une sous-suite $\{u_{r_k}\}$ faiblement convergente vers $u \in \mathcal{U}$ et puisque

(cf. lemme 2)

$$\int_a^b \Delta(t)u(t)dt = \lim_k \int_a^b \Delta(t)u_{r_k}(t)dt = \int_a^b \Delta(t)u_0(t)dt,$$

il s'ensuit que $u \in \mathscr{U}_0$.

L'existence de l'élément extrémal u^* dans $\mathscr{U}_0$ est alors une application d'un théorème de Krein-Milman dont nous donnons une démonstration par souci de complétion.

Désignons par $\{u_r\}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, une suite d'éléments dense dans L_2 et considérons les ensembles

$$\begin{aligned}
&\mathscr{U}_0,\\
&\mathscr{U}_1 = \{u \in \mathscr{U}_0 : (u, u_0) = \sup_{v \in \mathscr{U}_0} (v, u_0)\},\\
&\ldots\\
&\mathscr{U}_r = \{u \in \mathscr{U}_{r-1} : (u, u_{r-1}) = \sup_{v \in \mathscr{U}_{r-1}} (v, u_{r-1})\},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Les produits scalaires sont pris dans L_2.

Il est facile de vérifier que ces ensembles non-vides, emboîtés restent faiblement compacts dans L_2 et déterminent ainsi un élément $u^* \in \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathscr{U}_r$.

Cet élément est d'ailleurs unique vu la densité de la suite $\{u_r\}$.

Montrons que u^* *est extrémal pour* $\mathscr{U}_0$. Sinon, il existe $x, y \in \mathscr{U}_0$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$u^* = \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

Soit r_0 le premier indice tel que $(x, u_{r_0}) \neq (y, u_{r_0})$. Alors

$$(u^*, u_{r_0}) = \lambda(x, u_{r_0}) + (1 - \lambda)(y, u_{r_0}),$$

et

$$(u^*, u_{r_0}) \in](x, u_{r_0}), (y, u_{r_0})[,$$

ou $\qquad\qquad (*)$

$$\in](y, u_{r_0}), (x, u_{r_0})[.$$

Si $r_0 = 0$, l'appartenance de u^* à $\mathscr{U}_1$ entraîne

$$(u^*, u_0) = \sup_{v \in \mathscr{U}_0} (v, u_0) \geqslant \begin{cases} (y, u_0) \\ (x, u_0) \end{cases}$$

ce qui est contraire à (*).

Si $r_0 = 1$, alors

$$(x, u_0) = (y, u_0) = (u^*, u_0) = \sup_{v \in \mathscr{U}_0} (v, u_0),$$

donc x et $y \in \mathscr{U}_1$ et l'appartenance de u^* à $\mathscr{U}_2$ entraîne

$$(u^*, u_1) = \sup_{v \in \mathscr{U}_1} (v, u_1) \geqslant \begin{cases} (y, u_1) \\ (x, u_1) \end{cases}$$

ce qui est contraire à (*).

On montre ainsi, de proche en proche, que $x, y \in \mathscr{U}_{r_0}$ et puisque $u^* \in \mathscr{U}_{r_0+1}$, il vient

$$(u^*, u_{r_0}) = \sup_{v \in \mathscr{U}_{r_0}} (v, u_{r_0}) \geqslant \begin{cases} (y, u_{r_0}) \\ (x, u_{r_0}) \end{cases}$$

ce qui est contraire à (*).

L'élément u^* est donc extrémal.

Nous remercions Messieurs H. G. Garnir et M. De Wilde qui ont discuté ce travail avec nous.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. B. Lee and L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, J. Wiley, New-York, 1967.

[2] M. De Wilde, *Note on the Bang-Bang principle*, à paraître.

[3] J. F. C. Kingman and A. P. Robertson, On a theorem of Lyapounov, *J. London Math. Soc.*, 47 (1968), 347-351.

Institut de Mathématique
Université de Liège
15 *Avenue des Tilleuls*
Liège (*Belgique*)