Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 41e année, n° 1-2, 1972, pp. 14-19

SÉPARATION FORTE D'UNE FAMILLE FINIE D'ENSEMBLES CONVEXES

par Jacques BAIR (*)

SUMMARY

We extend well-known results about strong separation of two convex sets to finite families of convex sets in a vector space and in a topological vector space.

INTRODUCTION

Peu après que M. Vlach [VI] ait obtenu un théorème fondamental de séparation pour des familles finies d'ensembles convexes, nous étudions ce résultat au cas de la séparation franche [II]. Dans cet article, nous nous proposons d'étudier la séparation forte des familles finies d'ensembles avec le souci constant de généraliser les résultats connus pour deux ensembles; nous sommes ainsi en mesure d'étendre un grand nombre de théorèmes classiques : notamment les énoncés 8.1 à 8.5 de [I], les exercices 8 et 14 de [III; pp. 138-139], les théorèmes de [IV; p. 23] et de [V; pp. 257, 260].

1. GÉNÉRALITÉS

Dans les paragraphes 2 et 3 de cet article, nous nous placerons dans un espace vectoriel L sur le corps R des réels; nous développerons le dernier paragraphe dans un R-espace vectoriel topologique E, localement convexe et séparé, sauf pour le lemme 4 qui sera valable dans tout espace topologique séparé.

Les notions d'ensemble absorbant, de cône asymptote et d'ensemble parabolique sont tirées de [III; pp. 9, 125], celles d'internat ou de séparation de familles finies d'ensembles de [II et VI, pp. 655, 656]; par ailleurs, ${}^bA$ désignera l'enveloppe algébrique de l'ensemble A dans le R-espace où il est défini [I; p. 215].

Signalons encore quelques conventions très commodes. Pour chaque famille $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ d'ensembles non vides définis dans le R-espace vectoriel L ou le R-espace vectoriel topologique E, nous noterons respectivement M et N les ensembles de L^n ou E^n définis par $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ et $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x, x \in A_0\}$; nous nous permettrons de ne pas toujours rappeler la signification de ces ensembles M, N. Enfin, pr_i désignera la projection de L^n (resp. E^n) sur les i^e facteur L (resp. E).

Présenté par F. Jongmans, le 17 février 1972.
(*) Institut de mathématique, 15, avenue des Tilleuls, Liège (Belgique).

2. SÉPARATION FORTE DE DEUX ENSEMBLES

2.1. *Rappels.* Un ensemble A est *fortement séparé* d'un ensemble B s'il existe un hyperplan H qui est situé entre deux de ses translatés qui séparent A et B; dans ces conditions, on dit aussi que A est *fortement séparé de* B *par* H. Comme cette relation entre A, B est symétrique, on parle simplement de la *séparation forte de deux ensembles* A, B.

Deux ensembles sont fortement séparés par $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ si et seulement s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\sup f(A) \leqslant \alpha - \varepsilon$ et $\inf f(B) \geqslant \alpha + \varepsilon$ ou bien $\inf f(A) \geqslant \alpha + \varepsilon$ et $\sup f(B) \leqslant \alpha - \varepsilon$; mieux encore, si et seulement si $\sup f(A) < \inf f(B)$ ou $\sup f(B) < \inf f(A)$, moyennant le choix pour α d'un nombre quelconque intermédiaire aux deux membres de l'inégalité [I; p. 221].

Donnons une autre version de cette notion : elle nous suggérera la manière d'introduire la séparation forte d'une famille finie d'ensembles.

2.2. *Lemme* 1. *Deux ensembles* A, B *sont fortement séparés si et seulement s'il existe deux formes non nulles g et h sur* L *et deux réels* λ, μ *tels que* $g + h = 0$, $\lambda + \mu \leqslant 0$, $\sup g(A) < \lambda$ *et* $\sup h(B) < \mu$.

Preuve. Si A, B sont fortement séparés, il existe une forme f non nulle sur L, deux réels α et ε avec $\varepsilon > 0$ tels que, par exemple, $\sup f(A) \leqslant \alpha - \varepsilon$ et $\inf f(B) \geqslant \alpha + \varepsilon$. Il suffit alors de poser $g = f = -h$, $\lambda = \alpha = -\mu$; on obtient $\sup g(A) < \lambda$ et $\sup h(B) < \mu$ avec $\lambda + \mu = 0$.

Réciproquement, $\sup g(A) = \lambda - \varepsilon_1$ et $\sup h(B) = \mu - \varepsilon_2$, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pour tout x de A et tout y de B, on a respectivement $g(x) \leqslant \lambda - \varepsilon_1 \leqslant \lambda - \varepsilon$ et $h(y) \leqslant \mu - \varepsilon_2 \leqslant \mu - \varepsilon$ pour $\varepsilon = \mathrm{in}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. Posons $f = g$ et $\alpha = \lambda$: $f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon$ pour tout x de A entraîne $\sup f(A) \leqslant \alpha - \varepsilon$, tandis que $-f(y) \leqslant \mu - \varepsilon$ pour tout y de B entraîne $f(y) \geqslant -\mu + \varepsilon \geqslant \lambda + \varepsilon$ d'où $\inf f(B) \geqslant \alpha + \varepsilon$.

3. SÉPARATION FORTE D'UNE FAMILLE FINIE D'ENSEMBLES DANS UN ESPACE VECTORIEL

3.1. *Définitions.* Une famille finie $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite *fortement séparée* s'il existe une famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda) = (\{x \in L : f_i(x) = \lambda_i\})_{i \in I}$ qui sépare $\mathscr{A}$ [II] et pour laquelle $\sup f_i(A_i) < \lambda_i$ pour tout indice i de I; nous dirons encore que $\mathscr{A}$ est *fortement séparé par* $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$. En particulier, remarquons qu'une famille $\mathscr{A}$ composée de deux ensembles A, B est fortement séparée si et seulement si les ensembles A, B sont fortement séparés au sens rappelé en 2.1 (lemme 1).

3.2. *Lemme* 2. *Une famille finie* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparée si et seulement si* $\{0\}$ *est fortement séparé de* $\bigcup_{x \in A_0} [(x - A_1) \times \ldots \times (x - A_n)]$ *dans* L^n, *ou encore si et seulement si* $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *est fortement séparé de* $N = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_n = x, x \in A_0\}$ *dans* L^n.

Preuve. On montre facilement l'équivalence des deux dernières conditions, via le résultat 2.5 de [V].

Supposons que $\mathscr{A}$ soit fortement séparé par une famille d'ensembles $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$, avec $\mathscr{F} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ et $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soient $g(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ pour tout $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = -g$ et $\lambda_i^* = \sup f_i(A_i)$ pour tout i de $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$; pour tout y de M et tout z de N, on a respectivement $g(y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*$ et $h(z) \leqslant \lambda_0^*$. Partant, $\sup g(\mathrm{M}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda$ et $\sup h(\mathrm{N}) \leqslant \lambda_0^* < \lambda_0 = \mu$: on vérifie aisément que la famille (M, N) est fortement séparée par $\mathscr{H}^*[(g, h), (\lambda, \mu)]$ ou que les ensembles M, N sont fortement séparés (lemme 1).

Réciproquement, si M et N sont fortement séparés dans L^n, il existe deux formes non nulles g et h sur L^n et deux réels λ, μ tels que $g + h = 0$, $\lambda + \mu \leqslant 0$, $\sup g(\mathrm{M}) = \lambda^* < \lambda$ et $\sup h(\mathrm{N}) = \mu^* < \mu$ (lemme 1) : dès lors, il est possible de trouver un réel $\varepsilon < 0$ tel que $\lambda^* + n\varepsilon \leqslant \lambda$ et $\mu^* + \varepsilon \leqslant \mu$. Puisque l'espace des formes linéaires sur L^n est isomorphe à la n^e puissance de l'espace des formes linéaires sur L, il existe des formes linéaires non toutes nulles $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sur L telles que $g(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ pour tout $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; dans ces conditions $\sum_{i=1}^{n} \sup f_i(\mathrm{A}_i) \leqslant \lambda^*$. Posons $f_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, $\lambda_i = \sup f_i(\mathrm{A}_i) + \varepsilon$ pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\lambda_0 = \mu^* + \varepsilon$: $\sup f_i(\mathrm{A}_i) < \lambda_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sup f_0(\mathrm{A}_0) \leqslant \mu^* < \mu^* + \varepsilon = \lambda_0$, tandis que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \mu^* + \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \sup f_i(\mathrm{A}_i) + n\varepsilon \leqslant \mu + \lambda \leqslant 0$. La famille $\mathscr{A}$ est fortement séparée par $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \Lambda)$, où $\mathscr{F} = (f_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0,1,\ldots,n}$.

Remarque. Une démonstration analogue à la précédente montre qu'*une famille finie $\mathscr{A} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{2n})$ est fortement séparée si $\mathrm{P} = \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$ est fortement séparé de $\mathrm{Q} = \mathrm{A}_{n+1} \times \ldots \times \mathrm{A}_{2n}$ dans L^n.*

3.3. *Lemme* 3. *L'application $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}^n : x \to \widetilde{x} = (x, x, \ldots, x)$ est un isomorphisme vectoriel de* L *sur le sous-espace $f(\mathrm{L})$ de L^n.*

La preuve est immédiate. Il résulte de ce lemme que si A est un convexe (resp. une variété linéaire) sur L, $f(\mathrm{A})$ l'est également.

3.4. *Théorème* 1. *Soit $\mathscr{A} = (\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ une famille finie d'ensembles convexes doués de points internes. $\mathscr{A}$ est fortement séparé si et seulement si $0 \notin {}^b(\mathrm{M} - \mathrm{N})$, où $\mathrm{M} = \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$ et $\mathrm{N} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_n = x, x \in \mathrm{A}_0\}$.*

Preuve. La différence M — N est convexe et douée de points internes : M et N sont fortement séparés si et seulement si $0 \notin {}^b(\mathrm{M} - \mathrm{N})$ [I; 8.2]; partant, $\mathscr{A}$ est fortement séparé si et seulement si $0 \notin {}^b(\mathrm{M} - \mathrm{N})$ (lemme 2).

3.5. *Corollaire. Soit une famille finie $\mathscr{A} = (\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ telle que la différence* M — N *soit convexe, douée de points internes et algébriquement fermée dans L^n. $\mathscr{A}$ est fortement séparé si et seulement si $\bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i = \varnothing$.*

Preuve. Les ensembles M et N sont disjoints si et seulement si $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$; il suffit donc d'appliquer le résultat 8.4 de [I], puis le théorème I.

3.6. *Application* 1. *Soient* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes doués de points internes, algébriquement fermés et dont l'un au moins est uniponctuel. La famille* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparée si et seulement si* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$.

Preuve. Nous pouvons toujours supposer A_0 uniponctuel : M est un ensemble convexe algébriquement fermé, tandis que N est uniponctuel; la différence $M - N$ est donc convexe, douée de points internes et algébriquement fermée. Dans ces conditions, $\mathscr{A}$ est fortement séparé si et seulement si $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$. (3.5)

3.7. *Application* 2. *Soit une famille finie* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *de variétés linéaires non vides.* $\mathscr{A}$ *est fortement séparé si et seulement si* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$.

Preuve. Le résultat 3.5 peut encore être appliqué. En effet, les ensembles M et N sont des variétés linéaires : la différence $M - N$ est donc convexe, douée de points internes et algébriquement fermée comme variété linéaire non vide.

3.8. *Théorème* 2. *Soit une famille finie* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *telle que la différence* $M - N$ *soit convexe et douée de points internes.* $\mathscr{A}$ *est fortement séparé si et seulement s'il existe une fonction réelle f sur* L^n, *non négative et positivement homogène, pour laquelle* $\inf f(M - N) > 0$.

Preuve. Il suffit de rapprocher 8.5 de [I] du théorème 1.

3.9. *Théorème* 3. *Soient* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes non vides.* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparé s'il existe un ensemble* U *convexe, absorbant, tel que* $A_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} (U + A_i) = \varnothing$.

Preuve. Dans L^n, les ensembles M et N sont des convexes non vides; de plus, U^n est un ensemble convexe et absorbant tel que $M + U^n$ est disjoint de N; les ensembles M et N sont fortement séparés dans L^n [IV; p. 23], d'où le résultat (lemme 2).

4. Séparation forte d'une famille finie d'ensembles dans un espace vectoriel topologique

Nous nous placerons dorénavant dans un espace vectoriel topologique E localement convexe et séparé, sauf pour le lemme 4 qui sera valable dans tout espace topologique séparé. Les résultats suivants généralisent les théorèmes classiques de séparation forte de deux ensembles [V]; cependant, les hyperplans séparant les ensembles M, N seront supposés fermés dans E^n ou, de façon équivalente, toutes les formes f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ intervenant dans la famille $\mathscr{F}$ servant à séparer $\mathscr{A}$ seront supposées continues [V; p. 250].

4.1. *Théorème* 4. *Soit* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *une famille finie d'ensembles convexes non vides.* $\mathscr{A}$ *est fortement séparé si et seulement si* $0 \notin \overline{M - N}$, où $M = A_1 \times \ldots \times A_n$ et $N = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_n = x, x \in A_0\}$.

Preuve. Utiliser le théorème 2.6 de [V], puis le lemme 2.

4.2. *Corollaire. Soit une famille finie* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *telle que la différence* $M - N$ *est convexe et fermée.* $\mathscr{A}$ *est fortement séparé si et seulement si* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$.

4.3. *Lemme 4. L'application* $f : E \to E^n : x \to \tilde{x} = (x, \ldots, x)$ *est propre (c'est-à-dire est continue, fermée et donne de tout point une image réciproque compacte).*

Preuve. Montrons d'abord la continuité de f. Un voisinage $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ (V_i voisinage de x dans E) de $\tilde{x} = (x, \ldots, x)$ dans E^n a pour trace dans la diagonale $\Delta = f(E)$ l'image $f(\bigcap_{i=1}^{n} V_i)$; $f^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est donc voisinage de x dans E.

Démontrons à présent le caractère fermé de f. L'image $f(A)$ d'un fermé quelconque A par f est fermée. En effet, soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\complement f(A)$. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien il existe un indice i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour lequel $x_i \notin A$; comme A est fermé, on peut trouver un voisinage 0_i de x_i contenu dans $\complement A : 0 = \prod_{j=1}^{n} U_j$ où $U_j = E$ pour $j \neq i$ et $U_i = 0_i$ est un voisinage de x dans E^n contenu dans $\complement f(A)$; le point x considéré n'est pas adhérent à $f(A)$; $f(A)$ est fermé. Ou bien $x_i \in A$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, mais il existe deux indices k, l de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $x_k \neq x_l$; comme E est séparé, il existe des voisinages disjoints 0_k et 0_l respectivement de x_k, x_l : $0 = \prod_{j=1}^{n} U_j$ où $U_j = E$ pour tout $j \notin \{k, l\}$, $U_k = 0_k$ et $U_l = 0_l$ est un voisinage de x dans E^n; à nouveau, $x \notin f(A)^-$, $f(A)$ est fermé.

La dernière partie de l'énoncé résulte du caractère injectif de f.

4.4. *Application 1. Soient* A_0 *un convexe compact non vide,* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes fermés non vides.* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparé si et seulement si* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$.

Preuve. L'ensemble M est convexe et fermé, tandis que N est convexe et compact (lemme 4); la différence $M - N$ est convexe et fermée : il suffit dès lors d'appliquer le résultat 4.2.

4.5. *Application 2. Soient* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes, non vides et fermés. Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont localement compacts, si* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$ *et si les cônes asymptotes* C_{A_i} *vérifient la condition* $\bigcap_{i=0}^{n} C_{A_i} = \{0\}$, $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparé.*

Preuve. L'ensemble M est convexe, non vide, fermé et localement compact, tandis que N est convexe, non vide et fermé (lemme 4). Montrons que $C_M \cap C_N = \{0\}$, auquel cas $M - N$ est fermé [III; exercice 16, p. 125] et $\mathscr{A}$ est fortement séparé (4.2).

Procédons par l'absurde et supposons l'existence d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $C_M \cap C_N \cap \complement \{0\}$. Pour tout point a_i de A_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) et tout $\alpha \geqslant 0$, $(a_0, a_0, \ldots, a_0) + \alpha x \in N$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \alpha x \in M$; par ailleurs, les coordonnées de x

sont toutes égales et non nulles puisque $C_N \subset f(E)$ et $x \neq 0$. Dans ces conditions, les points $a_0 + \alpha x_1$ et $a_j + \alpha x_1$ appartiennent respectivement à A_0 et A_j pour tout j de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et tout $\alpha \geqslant 0$, d'où la contradiction $x_1 \in \bigcap_{i=0}^{n} C_{A_i} \cap \complement\{0\}$.

4.6. *Application* 3. *Soient* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes, non vides et fermés tels que* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *soient localement compacts et* A_0 *parabolique.* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparé si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$ *et* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \varnothing$;

b) *l'un des ensembles* A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *ne rencontre pas* A_0.

Preuve. Montrons que les hypothèses de 4.5 sont vérifiées.

Supposons l'existence d'une demi-droite D d'origine 0 contenue dans $\bigcap_{i=0}^{n} C_{A_i}$; pour tout x_i de A_i, $x_i + D \subset A_i$. Lorsque l'hypothèse a) est vérifiée, un point x de $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ livre $D' = x + D \subset A_1 \setminus A_0$ et $D' \subset x + C_{A_0}$; lorsque l'hypothèse b) est vérifiée, il existe un indice i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $A_i \cap A_0 = \varnothing$: pour tout point x_i de A_i, $D'' = x_i + D \subset A_i \setminus A_0$ et $D'' \subset x_i + C_{A_0}$. Tous ces résultats sont incompatibles avec le caractère parabolique de A_0; l'hypothèse de départ est donc absurde.

4.7. *Théorème* 5. *Soient* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes non vides.* $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *est fortement séparé s'il existe un voisinage* U *de l'origine tel que* A_0 *ne rencontre pas* $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i + U)$.

Preuve. Comme E est localement convexe, tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe de 0; de plus, tout voisinage de 0 est absorbant. Le théorème 3 peut donc être appliqué.

BIBLIOGRAPHIE

[I] Bair, Nouvelles propriétés des opérateurs algébriques dans un espace vectoriel, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **40**, 1971, pp. 214-223.

[II] Bair, Sur un théorème de séparation de M. Vlach, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **41**, 1972, pp. 11-13.

[III] Bourbaki, Éléments de mathématique, livre V, chap. I et II, Paris, Hermann, 1966.

[IV] Kelley-Namioka, Linear topological spaces, The University Series in Higher Mathematics, 1963.

[V] Klee, Separation and support properties of convex sets — a survey, in Balakrishnan, Control theory and the calculus of variations, Acad. Press, N. Y., 1969.

[VI] Vlach, A separation theorem for finite families, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **12**, 1971, pp. 655-660.