Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 1-2, 1969, pp. 8-13

PROPRIÉTÉS INDUCTIVES ET SOUS-ENSEMBLES MAXIMAUX

par LÉOPOLD BRAGARD (*)

SUMMARY

Answering a question raised by Valentine [I, p. 117, Introduction], we look for properties verifying the following theorem : *A set* A *has property* P *if and only if it contains one and only one maximal subset having property* P. Furthermore, we solve another problem of Valentine [I, p. 183, problem 9.3], namely the *characterization of star-shaped sets in terms of their maximal convex subsets.* Finally, we give some new properties of irradiated sets in connection with their maximal convex subsets.

1. *Définitions.*

1.1. Soit E un ensemble quelconque. Ordonnons ses parties par inclusion.

On appelle P-*composante* de E une partie de E maximale pour la propriété P, c'est-à-dire qui possède la propriété P et n'est strictement incluse dans aucune autre partie de E jouissant de la propriété P.

Une propriété P est *inductive* dans E si toute chaîne (c'est-à-dire toute famille non vide totalement ordonnée par l'inclusion) de sous-ensembles de E possédant la propriété P admet une borne supérieure au sein de l'ensemble des parties de E qui possèdent la propriété P ; si cette borne supérieure est précisément la réunion de la famille, la propriété P est dite U-*inductive*. Toute propriété U-inductive est inductive.

Une propriété P est *ponctuellement inductive* dans E (resp. *ponctuellement* U-*inductive*) si elle est inductive (resp. U-inductive) et si tout élément de E jouit de la propriété P.

1.2. Soit L un espace vectoriel sur R ou C.

Si x et y sont deux points de L, on appelle *segment pointé* $[x, y]$, *segment épointé* $]x, y[$ l'ensemble des points $(1 - \lambda)x + \lambda y$ avec respectivement $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 < \lambda < 1$. Si x et y sont deux points distincts de L, on appelle *droite* (x, y), *demi-droite pointée* en x et menée par y l'ensemble des points $(1 - \lambda)x + \lambda y$ avec respectivement λ réel, $\lambda \geqslant 0$.

Un ensemble A est *étoilé sur un point* a de L si, pour tout x de A, $[a, x]$ est inclus dans A ; l'ensemble des points de L sur lesquels A est étoilé est appelé le *mirador* de A et noté $\mu(A)$.

Un ensemble A de L est *demi-convexe* si $\frac{1}{2}(x + y) \in A$ lorsque $x, y \in A$.

(*) Institut de Mathématique, 15, Av. des Tilleuls, Liège.
Présenté le 27 février 1969 par F. Jongmans.

Un ensemble A de L jouit de la *propriété* P_n si chaque paire de points de A peut être jointe par une ligne polygonale de A ayant au plus n segments pointés.

Un ensemble A de L est *triponctuellement convexe* s'il contient, avec chaque triplet $\{a, b, c\}$ de ses points au moins un des trois segments pointés $[a, b]$, $[b, c]$, $[a, c]$.

1.3. Soit L′ un espace vectoriel topologique.

Un ensemble A de L′ est *irradié sur un point* a s'il est étoilé sur a et si toute demi-droite pointée en a rencontre la frontière de A en un point au plus ; l'ensemble des points de L′ sur lesquels A est irradié est appelé *noyau d'irradiation* de A et noté $\nu(A)$. Les ensembles irradiés, introduits par Jongmans [II, p. 236], ont été étudiés par l'auteur en parallèle avec les ensembles étoilés [III].

2. *Propriétés inductives*

2.1. *Dans* E, *si chaque* p-*uple de tout sous-ensemble* A_i *d'une chaîne* $(A_i)_{i\in I}$ *jouit d'une propriété* P, *alors tout* p-*uple de* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *jouit de la propriété* P.

Preuve. Considérons p éléments arbitraires de $\bigcup_{i\in I} A_i$. A chacun de ces p éléments, associons un des A_i qui le contiennent. On obtient ainsi une chaîne finie dont un sous-ensemble, soit A, contient les autres. La collection des p éléments arbitraires de $\bigcup_{i\in I} A_i$, appartenant à A, jouit de la propriété P.

Ce théorème 2.1, inspiré par Dubreil [IV, p. 225], conduit au corollaire suivant :

Corollaire. *Dans* L, *la convexité, la demi-convexité, la propriété* P_n, *la convexité triponctuelle sont des propriétés ponctuellement* U-*inductives ; le caractère étoilé sur un point* a *est une propriété* U-*inductive*.

3. *Composantes*

3.1. *Dans* L′, *si* A *est fermé, toute composante convexe* (resp. *demi-convexe, étoilée sur* a, *irradiée sur* a) *de* A *est fermée*.

Preuve. Le cas d'une composante convexe est connu [I, theorem 9.2]. Pour les composantes demi-convexe, étoilée sur a, irradiée sur a, il suffit de faire appel à [V, p. 114, problem A], [III, 2.19], [III, 3.10] respectivement.

3.2. *Toute partie* A *non vide de* E *jouissant de la propriété inductive* P *est contenue dans une* P-*composante de* E.

Preuve. Considérons l'ensemble non vide $\mathscr{E}$ des parties de E incluant A et jouissant de la propriété P. Par la définition d'une propriété inductive, toute partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$ admet une borne supérieure dans $\mathscr{E}$. Par l'axiome de Zorn, $\mathscr{E}$ admet un élément maximal.

Ce théorème 3.2 s'applique en particulier aux parties convexes, demi-convexes, triponctuellement convexes, étoilées sur a d'un ensemble A de L.

3.3. *Si tout élément de* E *appartient à une partie de* E *jouissant de la propriété inductive* P, *alors* E *jouit de la propriété* P *si et seulement s'il contient une seule* P-*composante*.

Preuve. Si E jouit de la propriété P, il contient évidemment une seule P-composante, à savoir lui-même. Inversement, si E contient une seule P-composante A, un élément quelconque de E appartient à une P-composante de E par 3.2, donc à A. En rapprochant $E \subset A$ de l'inclusion évidente $A \subset E$, on obtient $A = E$.

3.4. De 3.3, on déduit immédiatement le théorème suivant :

Un ensemble E *jouit de la propriété ponctuellement inductive* P *si et seulement s'il contient une seule* P-*composante.*

Remarquons que si, dans ce théorème, on remplace ponctuellement inductive par inductive ou même U-inductive, le théorème ne tient plus ; en effet, il suffit de considérer la propriété U-inductive « être ouvert », le théorème étant mis en défaut par l'ensemble $A = B \cup \{a\}$ de L', où B est un ouvert distinct de $\varnothing$ et distinct de L' et a un point frontière de B.

Le théorème précédent est une généralisation de la réponse à la question de Valentine [I, p. 117, Introduction] :

Puisqu'un ensemble convexe contient une seule composante convexe, à savoir lui-même, dans quelles conditions cette propriété caractérise-t-elle un ensemble convexe?

En effet, le théorème 3.4 vaut non seulement pour la convexité mais aussi pour la demi-convexité et la convexité triponctuelle notamment.

3.5. Dans [I, p. 183], Valentine pose la question suivante :

Si A est un fermé borné de L' et si chaque point de A est contenu dans une seule composante convexe de codimension au plus 1 de A, alors A est-il convexe?

La réponse est visiblement négative : il suffit de considérer l'ensemble formé par la réunion de deux ensembles de codimension nulle, convexes, fermés, bornés et disjoints. Dans le même ordre d'idée, nous établissons le théorème suivant :

Dans L, *si* A *est un ensemble jouissant de la propriété* P_n *et tel que chaque point de* A *appartient à une seule composante convexe de* A, *alors* A *est convexe.*

Preuve. Supposons A non convexe. Il existe deux points x et y de A tels qu'un point t de $]x, y[$ n'appartient pas à A. Par 3.2, ces deux points x et y appartiennent à des composantes convexes M_x et M_y, forcément disjointes. Comme A jouit de la propriété P_n, il existe dans A une chaîne de n segments au plus reliant x et y. Considérons deux sommets consécutifs u et v de cette chaîne. u appartient à une composante convexe M_u et v à une composante convexe M_v. Le segment $[u, v]$, sous-ensemble convexe de A, est inclus dans une composante convexe de A par 3.2 ; soit M cette composante. Les composantes M_u et M ayant un point en commun coïncident, de même M_v et M. De proche en proche, on démontre que les $n + 1$ sommets de la chaîne, en particulier x et y, appartiennent à une même composante convexe, d'où l'absurdité.

4. *Caractérisation d'un ensemble étoilé par ses composantes convexes.*

4.1. *Le mirador* $\mu(A)$ *d'un ensemble* A *de* L *est l'intersection de toutes les composantes convexes de* A. (*)

Preuve. Soit M l'intersection des composantes convexes de A. Si $x \in \mu(A)$ et $x \notin M$, il existe une composante convexe M_x de A à laquelle x n'appartient pas. Notons par X l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup M_x$. Un point y de X est de la forme $y = \alpha x + (1 - \alpha)u$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $u \in M_x$, et appartient visiblement à A. M_x ne serait

(*) Après avoir présenté cet article, j'ai pris connaissance d'un article de F. A. Toranzos [VII] qui donne ce théorème.

donc pas une composante convexe de A. Inversement, si $x \in M$ et si z est un point de A, z appartient à une composante convexe M_z de A, $[x, z] \subset M_z \subset A$, $x \in \mu(A)$.

4.2. *Un ensemble* A *de* L *est étoilé si et seulement si l'intersection de toutes les composantes convexes de* A *n'est pas vide.*

Ce théorème 4.2, conséquence immédiate de 4.1, donne une caractérisation des ensembles étoilés en termes de composantes convexes et résout un problème de Valentine [I, p. 183, problem 9.3].

5. *Noyau d'irradiation et composantes convexes.*

Comme dans [III], nous supposons que la dimension de L' est supérieure à 1 et que les ensembles irradiés considérés ne sont pas uniponctuels.

5.1. *La réunion et l'intersection d'un nombre fini* n (> 0) *d'ensembles* A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *irradiés sur un point* a *sont irradiées sur* a.

Preuve. Il suffit de faire la preuve pour la réunion et l'intersection de deux ensembles A_1 et A_2. Il est immédiat que $A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2$ sont étoilés sur a.

Supposons qu'une demi-droite pointée en a rencontre la frontière de $A_1 \cup A_2$ en deux points b et c tels que $b = (1 - \lambda)a + \lambda c$, $0 < \lambda < 1$. L'inclusion $(A_1 \cup A_2)^\bullet \subset \dot{A}_1 \cup \dot{A}_2$ [VI] donne $c \in \dot{A}_1$ ou $c \in \dot{A}_2$; soit, pour fixer les idées, $c \in \dot{A}_1$. Considérons un voisinage $c + V$ de c et un voisinage $b + V'$ de b. $V \cap V'$, voisinage de l'origine, contient un voisinage équilibré W de l'origine. $c + W$ rencontre A_1 en un point x et $\complement A_1$ en un point t. Le point $y = (1 - \lambda)a + \lambda x$ appartient à A_1, car A_1 est étoilé sur a, mais aussi $b + W$, car $y = (1 - \lambda)a + \lambda(c + w) = b + \lambda w$, $w \in W$. Comme b est point frontière de $A_1 \cup A_2$, $b + W$ rencontre aussi $\complement A_1$. Les points b et c appartiendraient donc à la frontière de A_1, ce qui contredirait l'irradiation de A_1 sur a. Un raisonnement analogue peut être fait si $c \in \dot{A}_2$.

De même, supposons qu'une demi-droite pointée en a rencontre la frontière de $A_1 \cap A_2$ en deux points b et c tels que $b = (1 - \lambda)a + \lambda c$, $0 < \lambda < 1$. L'inclusion $(A_1 \cap A_2)^\bullet \subset \dot{A}_1 \cup \dot{A}_2$ [VI] donne $b \in \dot{A}_1$ ou $b \in \dot{A}_2$; supposons que $b \in \dot{A}_1$. Considérons un voisinage $c + V$ de c et un voisinage $b + V'$ de b. $V \cap V'$, voisinage de l'origine, contient un voisinage équilibré W. Le voisinage $b + \lambda W$ de b rencontre A_1 en un point y et CA_1 en un point r. Le point $r = \frac{1}{\lambda} r - \frac{1 - \lambda}{\lambda} a$ de $c + W$ appartient à $\complement A_1$ [III, 3.7]. Comme c appartient à $(A_1 \cap A_2)^\bullet$, $c + W$ rencontre A_1 en un point x. Dès lors, A_1 ne serait pas irradié sur A. Un raisonnement analogue peut être fait si $b \in \dot{A}_2$.

Remarque. Toute intersection et toute réunion d'ensembles irradiés sur a ne sont pas nécessairement irradiées sur a ; en effet,

$$\bigcap_{0<\varepsilon<1} \{(x_1, x_2) : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, -\varepsilon < x_2 < \varepsilon\} \text{ et}$$

$$\bigcup_{n\leqslant 1} (\{(x_1, x_2) : (x_1 - n)^2 + x_2^2 < \sqrt{n^2 + 1}\} \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, -1 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$$

de R^2 ne sont pas irradiés sur l'origine. Ce dernier exemple montre aussi que *la propriété d'irradiation sur un point* a *n'est pas inductive.*

5.2. *Le noyau d'irradiation d'un fermé* A *inclut l'intersection des intérieurs des composantes convexes de* A.

Preuve. Soit a un point intérieur à toutes les composantes convexes de A. A est étoilé sur a par 4.1. Supposons qu'une demi-droite pointée en a rencontre la frontière de A en deux points b et c tels que $b = (1 - \lambda)a + \lambda c$, $0 < \lambda < 1$. Soit M une composante convexe à laquelle c appartient ; puisque $a \in \mathring{M}$, $b \in \mathring{M}$, par suite $c \in \mathring{A}$, ce qui est absurde.

5.3. *Les points de* $\nu(A)$ *qui n'appartiennent pas à l'intersection des intérieurs de toutes les composantes convexes de* A *appartiennent nécessairement à la frontière de* $\mu(A)$.

Preuve. Soit $a \in \nu(A)$, $a \notin \bigcap_{i \in I} \mathring{M}_i$, où $(M_i)_{i \in I}$ désigne la famille de toutes les composantes convexes de A. Il existe un élément de $(M_i)_{i \in I}$, soit M_j, tel que $a \notin \mathring{M}_j$. Or, $a \in \mu(A) = \bigcap_{i \in I} M_i$, donc $a \in \dot{M}_j$. Si $a \in (\mu(A))^o$, d'après $(\bigcap_{i \in I} M_i)^o \subset \bigcap_{i \in I} \mathring{M}_i$, on aurait $a \in \mathring{M}_j$, ce qui est absurde.

Corollaire. *Pour un fermé* A, $\bigcap_{\Gamma \in \mathscr{C}} \mathring{\Gamma} \subset \nu(A) \subset \bigcap_{\Gamma \in \mathscr{C}} \mathring{\Gamma} \cup (\mu(A))^{\cdot}$, *où* $\mathscr{C}$ *désigne l'ensemble des composantes convexes de* A.

5.4. Nous appellerons *point faible* d'un ensemble A un point de A qui n'appartient à aucune composante convexe de codimension nulle de A. Ainsi, l'ensemble $\{(x_1, x_2) : x_1^{2/3} + x_2^{2/3} \leqslant 1\}$ de R^2 possède les quatre points faibles $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$; remarquons aussi qu'il existe des ensembles doués de composantes convexes de codimension non nulle mais dépourvus de points faibles comme l'ensemble $\{(x_1, x_2) : |x_1 x_2| \leqslant 1\}$ de R^2.

Le théorème 5.2, trivial pour un fermé A qui contient des composantes convexes de codimension non nulle (donc d'intérieur vide), peut être amélioré dans le cas d'un fermé A sans points faibles :

5.5. *Le noyau d'irradiation d'un ensemble fermé* A *sans points faibles inclut l'intersection des intérieurs des composantes convexes de codimension nulle de* A.

Preuve. Soit a un point intérieur à toutes les composantes convexes de codimension nulle de A. A est étoilé sur a ; car si $x \in A$, il appartient à une composante convexe de codimension nulle de A, dont a fait partie, de sorte que $[a, x] \subset A$. Ceci montre en passant que toute composante convexe de A, même de codimension non nulle, contient aussi a, vu 4.1.

Supposons qu'une demi-droite pointée en a rencontre la frontière de A en deux points b et c tels que $b = (1 - \lambda)a + \lambda c$, $0 \leqslant \lambda < 1$. Soit M une composante convexe de codimension nulle de A à laquelle c appartient ; puisque $a \in \mathring{M}$, $b \in \mathring{M}$, par suite $b \in \mathring{A}$, ce qui est absurde.

5.6. *Pour un ensemble fermé* A *sans points faibles, l'intersection des intérieurs des composantes convexes de codimension nulle est incluse dans l'intersection (mirador de* A*) de toutes les composantes convexes de* A ; *quand ces deux intersections coïncident, le noyau d'irradiation de* A *coïncide avec son mirador.*

Ce théorème découle de 5.5 et de l'inclusion $\nu(A) \subset \mu(A)$.

5.7. Pour un fermé A sans points faibles, 5.5 donne une propriété plus fine que $(\mu(A))^o \subset \nu(A) \subset \mu(A) \cap \mathring{A}$ de [III, 3.3].

5.8. *Si l'espace* L′ *est localement convexe, tout point faible* x *d'un ensemble* A *est point frontière de* A.

Preuve. Si x est intérieur à A, un voisinage convexe convenable de x est inclus dans A, donc dans une composante convexe de codimension nulle de A, x n'est pas point faible de A.

Corollaire. *Dans l'espace* L' *localement convexe, si* x, y *sont deux points faibles, d'un ensemble* A *irradié sur* a, *ou bien* (x, y) *ne contient pas* a, *ou bien* $a \in]x, y[$.

BIBLIOGRAPHIE

[I] F. A. Valentine, Convex sets, Mac Graw-Hill Book Company, New York, 1964.

[II] F. Jongmans, Remarques sur le problème des extrema. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège,* 1961, pp. 229-242.

[III] L. Bragard, Ensembles étoilés et irradiés dans un espace vectoriel topologique. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège,* 1968, pp. 276-285.

[IV] P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin, Leçons d'algèbre moderne, Paris, Dunod, 1961.

[V] J. L. Kelley, I. Namioka and co-authors, Linear topological spaces, Princeton, Van Nostrand, 1963.

[VI] F. Jongmans, Incidents de frontière. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège,* 1963, pp. 814-822.

[VII] F. A. Toranzos, Radial fonctions and star-shaped bodies, *The american mathematical monthly,* vol. 74, n° 3, pp. 278-280.