

## LE MONTAGE WADSWORTH INVERSÉ

par J. M. VREUX  
*Aspirant F.N.R.S.*

### RÉSUMÉ

Les possibilités d'inversion du montage Wadsworth sont examinées à l'aide du principe de Fermat. Les expressions mathématiques donnant la focale et la coma d'un tel montage sont explicitées.

### INTRODUCTION

Le problème de l'enregistrement par voie photographique du spectre ultra-violet lointain de sources faibles nous a conduit à considérer les propriétés optiques d'un montage du type Wadsworth inversé [1].

La vitesse d'un spectrographe travaillant par voie photographique est en effet directement proportionnelle à la densité de flux lumineux tombant sur la plaque ou le film photographique, flux qui est lui-même directement proportionnel au carré de l'ouverture angulaire vue de la plaque (ou du film), c'est-à-dire au carré de l'ouverture de chambre.

Comme il s'agit d'autre part d'enregistrer un spectre dans l'ultra-violet lointain, toute réfraction doit être éliminée et le nombre de réflexions doit être aussi faible que possible. Ce dernier point milite évidemment en faveur de montages ne comprenant que le réseau comme élément d'optique et où, par conséquent, le nombre de réflexions est vraiment limité au strict minimum.

Malheureusement, les réseaux disponibles actuellement ne permettent pas d'obtenir une ouverture de chambre suffisamment grande. C'est pourquoi un compromis a dû être réalisé entre, d'une part, l'ouverture de chambre et, d'autre part, le nombre de réflexions. Ce compromis nous a conduit au montage Wadsworth inversé, inversé justement pour répondre au mieux à l'exigence d'une grande ouverture de chambre.

Dans le montage que nous étudierons, la fente est placée au foyer d'un réseau concave, et le centre de courbure du miroir sphérique de chambre est confondu avec le centre de la surface gravée du réseau.

Lors de cette première étude, nous nous limiterons au cas du montage Wadsworth inversé dans le plan, c'est-à-dire un montage où tous les éléments principaux (centre de la fente d'entrée, centre de courbure du réseau, centre du réseau, centre de courbure du miroir et centre de la fente de sortie) sont situés dans un même plan perpendiculaire aux traits du réseau et que nous appellerons plan principal.

Présenté par A. Monfils, le 19 décembre 1968.

Le traitement des systèmes spectroscopiques est compliqué par le fait qu'il n'existe qu'un plan de symétrie au lieu d'un axe comme dans le cas d'une lentille.

Nous rapporterons donc tout au rayon principal qui est le rayon passant par le centre de la fenêtre d'entrée et qui joint les centres des espaces-objets et -images.

Nous utiliserons les notations suivantes pour définir la position du foyer tangentiel et sagittal :

$S_s$  : distance sagittale mesurée le long du rayon principal.

$S_m$  : distance tangentielle mesurée le long du rayon principal.

$\alpha_0$  : angle du rayon principal incident avec la normale à la surface du réseau.

$\beta_0$  : angle du rayon principal diffracté avec la normale à la surface du réseau.

$R$  : rayon de courbure du réseau.

$\rho$  : rayon de courbure du miroir.

Moyennant ces conventions, les formules donnant la position du foyer sagittal et du foyer tangentiel s'écrivent :

$$\frac{1}{S'_s} - \frac{1}{S_s} = -\frac{\cos \alpha_0 + \cos \beta_0}{R}$$

$$\frac{\cos^2 \beta_0}{S'_m} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{S_m} = -\frac{\cos \alpha_0 + \cos \beta_0}{R}$$

où  $S'_s$  et  $S'_m$  se rapportent à l'espace-image.

Toutes les distances sont mesurées le long du rayon principal et comptées positivement dans le sens du rayon incident.

Appliquant une première fois ces relations pour le passage sur le réseau, nous obtenons dans le cas actuel où  $\alpha_0 = 0$  et  $S_s = S_m = \frac{R}{2}$

$$S'_s = \frac{R}{1 - \cos \beta_0}$$

$$S'_m = \frac{R \cos^2 \beta_0}{1 - \cos \beta_0}$$

A partir de ces relations et compte tenu du fait que ce centre de courbure du miroir coïncide avec le centre de la surface gravée du réseau, nous pouvons calculer les distances sagittale et tangentielle de l'espace-objet du miroir de chambre.

Appliquant alors une seconde fois les relations de passage, nous obtenons finalement, en posant  $F = \frac{\rho}{2}$

$$S''_m = -\frac{FR \cos^2 \beta_0 + 2F^2 (1 - \cos \beta_0)}{R \cos^2 \beta_0 + F(1 - \cos \beta_0)}$$

$$S''_s = -\frac{FR + 2F^2 (1 - \cos \beta_0)}{R + F(1 - \cos \beta_0)}$$

Du point de vue spectroscopique, ce qui nous intéresse, c'est le foyer tangentiel, c'est-à-dire la relation donnant  $S_m$ .

Dans cette relation, la valeur de l'angle de diffraction  $\beta_0$  est reliée à la longueur d'onde considérée  $\lambda$  par la loi générale de la diffraction appliquée au rayon principal, à savoir :

$$\sin \beta_0 = \frac{m\lambda}{\sigma}$$

où  $m$  est l'ordre spectral et  $\sigma$  la constante du réseau.

SECONDE APPROXIMATION — PRINCIPE DE FERMAT

La méthode que nous utiliserons maintenant pour le calcul des aberrations du montage Wadsworth inversé est essentiellement la même que celle développée par Beutler [2], Namioka [3] et Seya [4].

Il s'agit en fait d'appliquer le principe de Fermat à la combinaison optique étudiée, ce qui nécessite l'expression mathématique du chemin optique.

Afin de simplifier les calculs lors de cette première approche du problème, nous nous bornerons à examiner ce qui se passe dans un plan contenant le point-source et les sommets du miroir et du réseau. Les traits du réseau seront assimilés à des droites d'épaisseur nulle, perpendiculaires au plan défini ci-dessus.

Au moyen d'un schéma de principe du montage Wadsworth inversé (figure 1), nous définirons tout d'abord les éléments principaux qui serviront de base au calcul.

Nous nous plaçons dans un système de coordonnées cartésiennes dont l'origine  $O$  est située sur le miroir sphérique et dont l'axe  $OX$  est confondu avec la normale au miroir en ce point. Considérons un rayon lumineux issu du point-source  $A(x_A, y_A)$  et qui tombe en un point  $P(x_P, y_P)$  de la surface du réseau concave. Après diffraction, ce rayon se réfléchit en un point  $Q(x, y)$  de la surface du miroir sphérique et aboutit finalement au point de focalisation  $B(x_B, y_B)$ .

Le réseau concave est caractérisé par son rayon de courbure  $R_G$ , son centre de courbure  $C_G(x_G, y_G)$  et le centre de la surface gravée  $G_0(x_{G0}, y_{G0})$ . Soient  $C_M(x_{C_M}, y_{C_M})$  le centre de courbure du miroir sphérique et  $\rho$  son rayon de courbure.

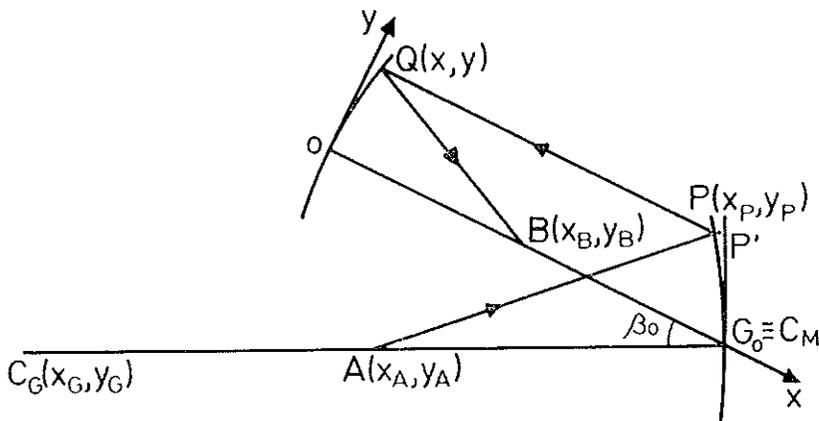


Fig. 1. — Schéma de principe du montage Wadsworth inversé.

Nous étudierons tout d'abord le cas particulier de la figure 1 où le sommet du réseau  $G_0$  est confondu avec  $C_M$  et où le point source  $A$  est situé au milieu de  $C_G G_0$ . Dans ces conditions, nous avons :

$$\begin{aligned} x_A &= \rho - \frac{R}{2} \cos \beta_0 \\ y_A &= -\frac{R}{2} \sin \beta_0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_G &= \rho - R \cos \beta_0 \\ y_G &= -R \sin \beta_0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_B &= S \text{ (où } S \text{ est égal à la distance } OB) \\ y_B &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Afin de pouvoir écrire la fonction  $F$  représentant le chemin optique pour le rayon  $APQB$ , nous devons tout d'abord calculer les expressions de  $\langle AP \rangle$ ,  $\langle PQ \rangle$  et  $\langle QB \rangle$  en fonction de  $y$

$$\text{où} \quad \langle AP \rangle^2 = (x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 \tag{4}$$

$$\langle PQ \rangle^2 = (x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 \tag{5}$$

$$\langle QB \rangle^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \tag{6}$$

et où les coordonnées de  $A$  et  $B$  sont des paramètres.

Le problème principal consiste donc à exprimer  $x_P$  et  $y_P$  en fonction de  $y$ . Une expression analytique de  $x_P$  et  $y_P$  peut être obtenue en résolvant simultanément l'équation du réseau

$$(x_P - x_G)^2 + (y_P - y_G)^2 = R^2 \tag{7}$$

et l'équation du rayon  $PQ$

$$\frac{x_P - x}{l'} = \frac{y_P - y}{m'} \tag{8}$$

où  $l'$  et  $m'$ , cosinus directeurs du rayon  $PQ$ , seront exprimés en termes des cosinus directeurs ( $l'''$ ,  $m'''$ ) du rayon  $BQ$  et des cosinus directeurs ( $l''''$ ,  $m''''$ ) de la normale au miroir  $QC_M$ . Dans le cas étudié, les relations (1), (2) et (3) ainsi que l'équation de la surface du miroir sphérique  $\left(x = \frac{y^2}{2\rho}\right)$  nous donnent

$$l''' = \frac{S - \frac{y^2}{2\rho}}{\langle QB \rangle} \tag{9}$$

$$m''' = \frac{-y}{\langle QB \rangle} \tag{10}$$

$$l'''' = \frac{\rho - \frac{y^2}{2\rho}}{\rho} \tag{11}$$

$$m'''' = -\frac{y}{\rho} \tag{12}$$

Quant aux lois de la réflexion, elles s'écrivent :

$$l' = 2 l''' (l'' l'''' + m'' m''') - l'' \quad (13)$$

$$m' = 2 m''' (l'' l'''' + m'' m''') - m'' \quad (14)$$

A partir des expressions (9), (10), (11), (12), (13) et (14), nous obtenons, en nous limitant aux termes du 3<sup>e</sup> degré en  $y$  :

$$l' = \frac{1}{\langle QB \rangle} \left\{ S + \frac{y^2}{\rho^2} \left( \frac{3\rho}{2} - 2S \right) \right\} \quad (15)$$

$$m' = - \frac{1}{\langle QB \rangle} \left\{ y \left( \frac{2S}{\rho} - 1 \right) + y^3 \left( \frac{\rho - S}{\rho^3} \right) \right\} \quad (16)$$

D'autre part, les équations (7) et (8) nous donnaient :

$$x_P = - l' m'(y - y_G) + m'^2 x + l'^2 x_G + l' [R^2 - \{m'(x - x_G) - l'(y - y_G)\}]^{1/2} \quad (17)$$

$$y_P = - l' m'(x - x_G) + l'^2 y_G + m'^2 y_G + m' [R^2 - \{m'(x - x_G) - l'(y - y_G)\}]^{1/2} \quad (18)$$

A partir des relations (1), (2), (3), (15), (16), (17) et (18), on obtient après développement en séries

$$\begin{aligned} x_P = & \rho \\ & + y \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \\ & + y^2 \left[ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) - \frac{1}{2R \cos^3 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right] \\ & + y^3 \sin \beta_0 \left[ \frac{1}{S \cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S^2} + \frac{9}{2\rho} - \frac{7}{2S} - \frac{2s}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{3}{2R \cos^4 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2R^2 \cos^5 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \right] \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_P = & y \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \\ & + y^2 \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( \frac{1}{S} - \frac{2}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \\ & + y^3 \left\{ \left( \frac{7}{2S^2} - \frac{9}{2\rho S} + \frac{2}{\rho^2} - \frac{\rho}{S^3} \right) + \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2R \cos^3 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

Utilisant les expressions (1), (2), (3), (19) et (20), les équations (4), (5) et (6) se réécrivent :

$$\begin{aligned} \langle AP \rangle^2 &= \frac{R^2}{4} \\ &- Ry^2 \left\{ \frac{1}{\cos \beta_0} \left( \frac{1}{S} - \frac{2}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) + \frac{1}{\cos \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2R \cos^2 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \\ &- Ry^3 \sin \beta_0 \left\{ - \frac{1}{R \cos^3 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2R^2 \cos^4 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle PQ \rangle^2 &= \rho^2 + 2y\rho \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \\ &+ y^2 \left[ \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 - 2 \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + 2\rho \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) - \frac{1}{2R \cos^3 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \right] \\ &+ y^3 \left[ - \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{S} \right) + 2\rho \sin \beta_0 \left\{ \frac{1}{S \cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S^2} + \frac{9}{2\rho} - \frac{7}{2S} - \frac{2S}{\rho^2} \right) \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 - \frac{3}{2R \cos^4 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2R^2 \cos^5 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \right\} + 2 \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \left\{ \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) - \frac{1}{2R \cos^3 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} - 2 \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( \frac{1}{S} - \frac{2}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\langle QB \rangle^2 = S^2 + y^2 \left( 1 - \frac{S}{\rho} \right).$$

Et finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle AP \rangle &= \frac{R}{2} + \frac{y^2}{2R \cos^2 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 + \frac{y^3 \sin \beta_0}{R \cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \\ &\quad \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{2R \cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle PQ \rangle &= \rho + y \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \\ &+ y^2 \frac{1}{2\rho} \left[ \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 - 2 \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + 2\rho \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) - \frac{1}{2R \cos^3 \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y^3 \left[ \sin \beta_0 \left\{ \frac{1}{S \cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S^2} + \frac{9}{2\rho} - \frac{7}{2S} - \frac{2S}{\rho^2} \right) \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{3}{2R \cos^4 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2R^2 \cos^5 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \right\} + \frac{\sin \beta_0}{\rho \cos^2 \beta_0} \\
& \quad \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left\{ \frac{\cos \beta_0}{2\rho} + \left( \frac{1}{S} - \frac{2}{\rho} \right) \cos \beta_0 - \frac{\cos \beta_0}{\rho} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \cos \beta_0 \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) - \frac{\cos \beta_0}{2\rho} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 \right\} \left. \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\langle \text{QB} \rangle = S + \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (23)$$

Dans le cas du rayon APQB, la fonction F représentant le chemin optique s'écrit :

$$F = \langle \text{AP} \rangle + \langle \text{PQ} \rangle + \langle \text{QB} \rangle + \frac{t}{\sigma} m\lambda \quad (24)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $m$  l'ordre spectral,  $\sigma$  la constante du réseau et  $t$  la distance du point P' au point G<sub>0</sub> mesurée le long de la tangente au réseau en G<sub>0</sub> (P' étant la projection de P sur cette tangente).

Il nous reste à calculer  $t$  en fonction de  $y$ , soit

$$t = \rho \sin \beta_0 - x_P \sin \beta_0 + y_P \cos \beta_0 \quad (25)$$

Utilisant les relations (19) et (20), (25) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
t & = \frac{y}{\cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \\
& + y^2 \frac{\sin \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{2R \cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \\
& - y^3 \left\{ \frac{1}{S \cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S^2} + \frac{9}{2\rho} - \frac{7}{2S} - \frac{2S}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 - \frac{3}{2R \cos^4 \beta_0} \right. \\
& \quad \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2R^2 \cos^5 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 + \frac{1}{R \cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \\
& \quad \left. \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2R^2 \cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \right\} \quad (26)
\end{aligned}$$

Moyennant les expressions (21), (22), (23) et (26), (24) s'écrit

$$\begin{aligned}
F & = \left( S + \frac{R}{2} + \rho \right) \\
& + y \frac{1}{\cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( -\sin \beta_0 + \frac{m\lambda}{\sigma} \right) \\
& + y^2 \left[ \frac{\sin \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{2R \cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right) \right\} \left( -\sin \beta_0 + \frac{m\lambda}{\sigma} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\cos^2 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 \left\{ \frac{\cos^2 \beta_0}{2\rho \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} + \frac{1}{2R} + \frac{\cos \beta_0}{2\rho} \left( \cos \beta_0 - \frac{\rho}{R} - \frac{2 \cos \beta_0}{\left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} \right) \right\} \Big] \\
& + y^3 \left[ \frac{2 \sin \beta_0}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left\{ \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) + \frac{1}{2R \cos \beta_0} \left( 1 - \frac{\rho}{S} \right)^2 \right\} \right\} \frac{\cos^2 \beta_0}{2\rho \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} \\
& \quad + \frac{1}{2R} + \frac{\cos \beta_0}{2\rho} \left( \cos \beta_0 - \frac{\rho}{R} - \frac{2 \cos \beta_0}{\left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} \right) \Big\} \\
& - \left\{ \frac{1}{S \cos \beta_0} \left( \frac{\rho}{S^2} + \frac{9}{2\rho} - \frac{7}{2S} - \frac{2S}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right) \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right)^2 \right. \\
& - \frac{3}{2R \cos^4 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2R^2 \cos^5 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \\
& + \frac{1}{R \cos^2 \beta_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{S} \right) \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2R^2 \cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \Big\} \left( -\sin \beta_0 + \frac{m\lambda}{\sigma} \right) \\
& + \frac{1}{\cos^3 \beta_0} \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \left\{ \frac{\sin \beta_0 \cos^2 \beta_0}{2\rho^2 \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^2} + \frac{\cos \beta_0 \sin \beta_0}{2\rho R \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} \right. \\
& \left. + \frac{\sin \beta_0 \cos \beta_0}{2\rho^2} \left( \cos \beta_0 - \frac{\rho}{R} - \frac{2 \cos \beta_0}{\left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)} \right) \right\} \Big] \\
& = F_0 + F_1 + F_2 + F_3. \tag{27}
\end{aligned}$$

D'après le principe de Fermat, le point-image B est situé de telle sorte que la fonction F représentant le chemin optique est un extremum, quel que soit le point Q sur la surface du miroir, c'est-à-dire

$$\frac{dF}{dy} = 0 \tag{28}$$

Si l'équation (28) pouvait être satisfaite pour un point B donné et pour n'importe quelle valeur de y, alors B serait un point de focalisation parfaite.

En fait,  $\frac{dF}{dy}$  est une fonction de y et cette fonction ne peut être nulle pour un point B fixé que si le terme indépendant et tous les coefficients de  $y^n$  compris dans  $\frac{dF}{dy}$  sont identiquement nuls.

L'application de cette condition aux termes du premier et du second ordre de la relation (27) nous donne respectivement :

$$\sin \beta_0 = \frac{m\lambda}{\sigma} \tag{29}$$

qui est l'équation habituelle de la diffraction,

$$\text{et } R \cos^2 \beta_0 + \rho \left( \frac{\rho}{s} - 1 \right) + R \cos \beta_0 \left( \frac{\rho}{s} - 1 \right) \left\{ \cos \beta_0 - \frac{\rho}{R} - \frac{2 \cos \beta_0}{\left( \frac{\rho}{s} - 1 \right)} \right\} = 0 \quad (30)$$

qui est l'équation de la focale obtenue précédemment.

Malheureusement,  $\frac{dF_3}{dy}$  et les dérivées d'ordre supérieur par rapport à  $y$  ne peuvent pas toujours être réduites à zéro, quelle que soit la valeur de  $y$ . Par conséquent, le rayon lumineux passant par un point Q différent de O tombera en dehors du point-image de référence (tel qu'il est défini par le rayon principal) et recoupera la surface focale à une distance de ce dernier donnée par l'expression

$$\Delta = QB \cdot \frac{dF}{dy} = S \cdot \frac{dF_3}{dy} \quad (31)$$

Introduisant les équations (29) et (30) dans (31), nous obtenons finalement

$$3y^2 \cdot \frac{FR \cos^2 \beta_0 + 2F^2(1 - \cos \beta_0)}{R \cos^2 \beta_0 + F(1 - \cos \beta_0)} \cdot \frac{\sin \beta_0}{2R^2 \cos^2 \beta_0} (1 - \cos \beta_0) \quad (32)$$

qui nous donne la coma du système.

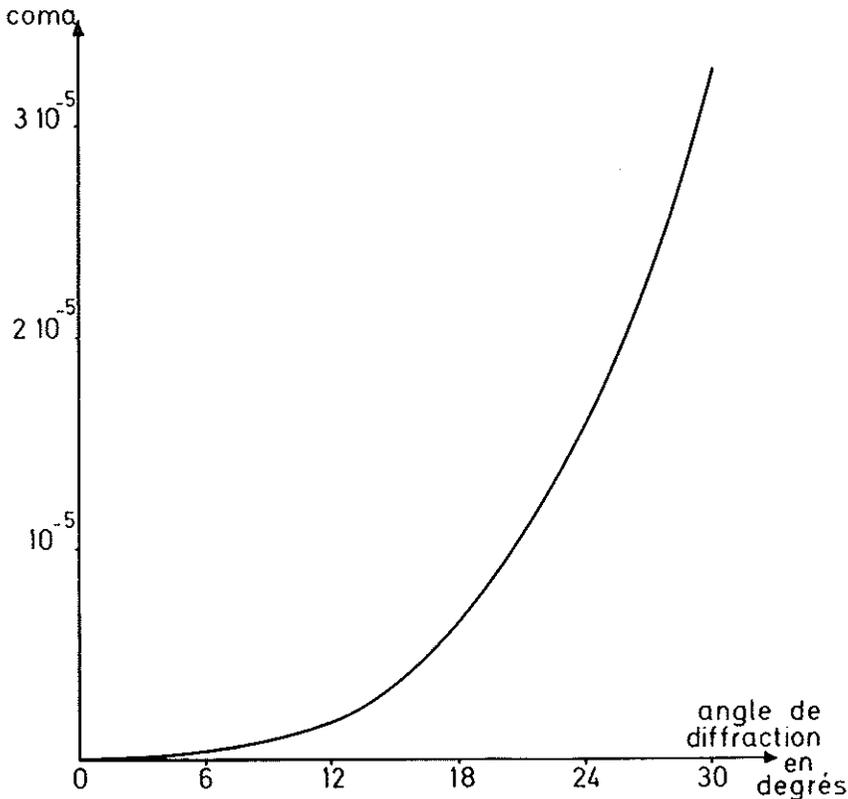


Fig. 2

On voit immédiatement que les aberrations de cet ordre sont nulles pour  $\lambda = 0$  et restent très faibles aussi longtemps que  $\beta_0$  est petit, ce qui est bien le résultat recherché. (Nous montrerons ultérieurement par un traitement tri-dimensionnel que l'astigmatisme du montage actuel est extrêmement réduit).

Prenant  $S$  comme unité de longueur, nous avons tracé un graphique (figure 2) donnant la valeur de la coma en fonction de l'angle de diffraction pour

$$D (*) = \frac{R}{2S} = 4 \text{ et pour } O (*) = \frac{2y}{S} = \frac{1}{4}.$$

A titre de comparaison, dans la même unité, la dispersion linéaire est de l'ordre de  $10^4$  si on utilise un réseau de 1200 traits/mm.

#### ADDENDUM

On peut très facilement généraliser cette étude au cas où le point-source  $A$  ne se trouve plus sur la normale au réseau mais est donné par ses coordonnées  $(r', \alpha_0 + \beta_0)$  telles qu'elles sont définies dans la figure 3.

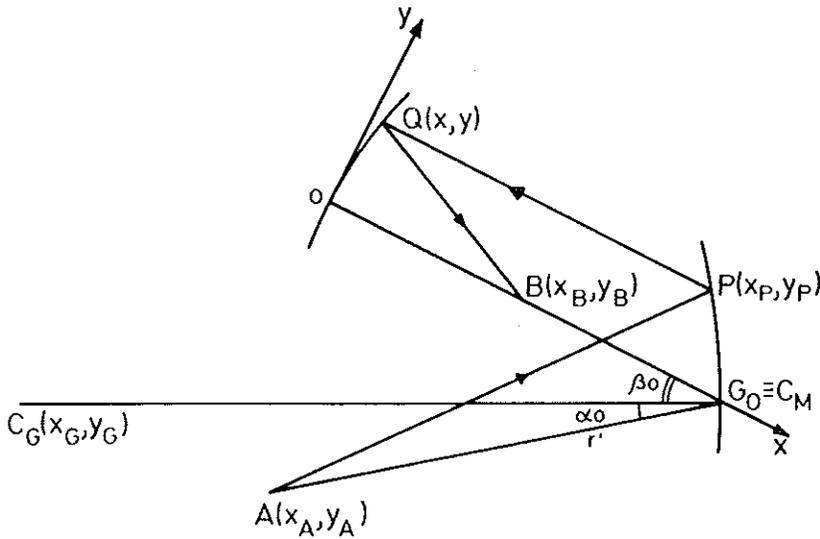


Fig. 3. — Les signes de  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont opposés si le rayon principal incident  $AG_0$  et le rayon principal diffracté  $G_0O$  sont situés du même côté de la normale au réseau.

Dans ces conditions les équations (29), (30) et (32) s'écrivent respectivement équation du réseau

$$\sin \beta_0 - \sin \alpha_0 = \frac{m\lambda}{\sigma} \quad (33)$$

(\*)  $D$  est approximativement égal à la démagnification et  $O$  à l'ouverture de chambre.

équation de la focale

$$\frac{1}{2r'} \left( \cos^2 \alpha_0 - \frac{r' \cos \alpha_0}{R} \right) + \frac{\cos \beta_0}{2\rho} \left\{ \cos \beta_0 - \frac{p}{R} - \frac{\cos \beta_0}{\frac{\rho}{S} - 1} \right\} = 0 \quad (34)$$

coma

$$3y^2 \cdot S \cdot \left( \frac{\rho}{S} - 1 \right)^3 \frac{\sin \beta_0 \cos^2 \alpha_0}{2 \cos^5 \beta_0} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_0}{r'^2} - \frac{2 \cos \alpha_0}{r'R} - \frac{\cos \beta_0}{r'R} \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} + \frac{\cos \beta_0}{R^2 \cos \alpha_0} - \frac{\sin \alpha_0 \cos^2 \beta_0}{r'^2 \sin \beta_0} + \frac{\cos^2 \beta_0 \sin \alpha_0}{Rr' \cos \alpha_0 \sin \beta_0} \right\} \quad (35)$$

où S est donné par l'équation (34).

Appliquant cette dernière relation au cas particulier où  $r' = \frac{R \cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}$  nous obtenons

$$- 3y^2 \frac{S \sin \alpha_0}{2R^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \beta_0} (\cos \alpha_0 + \cos \beta_0),$$

ce qui est en accord avec les résultats de Seya.

Nous pouvons également étudier comme cas particulier le montage Czerney-Turner.

Posant  $\alpha_0 = \beta_0$  et  $r' = \frac{R \cos \beta_0}{2}$ , nous trouvons :

$$- 3y^2 \frac{S \sin \beta_0}{R^2 \cos^3 \beta_0}$$

ce qui est en accord avec les résultats de Rosendhal [5].

En égalant la relation (35) à zéro, nous arrivons à une équation en  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $r'$  et R, qui nous permet de choisir les meilleures constantes instrumentales, c'est-à-dire les valeurs de  $\alpha_0$  et  $\frac{r'}{R}$  qui annulent la coma à la longueur d'onde désirée et lui donnent la valeur la plus petite possible pour les longueurs d'onde voisines de  $\lambda_0$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MONFELS A. and VREUX J. M., 1967, *J. Sci. Instrum.*, 44, 357-359.
- [2] BEUTLER H. G., 1945, *J.O.S.A.*, 35, 311-350.
- [3] NAMOKA T., 1959, *J.O.S.A.*, 49, 446-460.
- [4] SEYA M. and NAMOKA T., 1967, *Science of light*, 16, 158-168.
- [5] ROSENDAHL G. R., 1962, *J.O.S.A.*, 52, 412-415.